Е.К. САМАРОВ

# СТРАХОВАЯ МАТЕМАТИКА
# В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Москва, 2007

## К читателю

История развития страховой математики неразрывно связана с историей развития страхования и насчитывает много веков. Однако изучение страховой математики не является простым занятием даже для специалистов в области страхования, так как по сложности объектов исследования и применяемому аппарату страховая математика значительно превосходит общую теорию страхования. Еще более сложным оказывается применение полученных знаний на практике.

Разрыв в сложности проявляется также и между литературой, посвященной страховому делу, и литературой по страховой математике.

Данное пособие, на мой взгляд, немного сглаживает этот разрыв и будет полезным сотрудникам страховых компаний, занимающимся практической страховой деятельностью, профессиональным актуариям и студентам.

Я попытался представить теоретические основы страховой математики максимально кратко и понятно, а также изложить способы их применения в виде примеров и задач, имеющих максимально приближенный к реальности характер.

Очень надеюсь, что мне это удалось.

Выражаю глубокую благодарность за внимание и поддержку моему отцу, Самарову Киму Леонидовичу, вдохновившему меня написать это пособие, а также всему коллективу ОАО «АльфаСтрахование», в котором мне посчастливилось работать, и, в особенности, заместителю Генерального директора Башмачникову Александру Михайловичу.

Самаров Евгений Кимович,
кандидат технических наук

# 1 Системы страхового возмещения ущерба

## *1.1 Принцип страхового возмещения ущерба*

*Страховым риском* называют *предполагаемое событие*, на случай наступления которого проводится страхование. События, определенные в качестве страховых рисков, могут, как произойти, так и не произойти.

Если событие, определенное в качестве страхового риска, *произошло*, то его называют *страховым событием*.

За страхование *страхователь* уплачивает страховщику *страховую брутто-премию* (часто используются термины: *страховая премия, брутто-премия*).

Страховая премия может быть уплачена *единовременно* или в *рассрочку* при помощи *страховых взносов*. В случае уплаты страховой премии в рассрочку со страхователя взимается дополнительная комиссия.

*Страховой суммой* называют денежную сумму, на которую в соответствии со страховым договором застрахованы риски.

*Размером ущерба* называют стоимость, которая *теряется* в результате наступления страхового события. Размеры ущербов, вызываемых страховыми событиями, заранее не известны.

*Возмещением ущерба* называют денежную сумму, которую выплачивает *страховщик* в результате возникновения страхового события.

*Принцип страхового возмещения ущерба* является одним из базисных страховых принципов и заключается в следующем:

- Страховая сумма не может превышать реальной цены застрахованного объекта;
- Размер ущерба не может превышать реальной цены застрахованного объекта;
- Размер страхового возмещения ущерба не может превышать страховой суммы.

В страховых договорах используется несколько различных *систем страхового возмещения ущерба*, построенных на основе принципа страхового возмещения ущерба. К описанию таких систем мы сейчас и переходим.

## 1.2 Возмещение ущерба по системе первого риска

При страховании по системе *первого риска* ущерб, размер которого не превышает страховой суммы (*первый риск*), возмещается в полном объеме. Ущерб, размер которого превышает страховую сумму (*второй риск*), возмещается в размере страховой суммы.

**Пример 1.2.1.** Автомобиль застрахован на сумму 16 000 у.е. Размер ущерба 12 000 у.е. Найти страховое возмещение по системе первого риска.

**Решение.** Поскольку размер ущерба меньше страховой суммы, то страховое возмещение равно размеру ущерба и составляет 12 000 у.е.

**Ответ:** 12 000 у.е.

**Пример 1.2.2.** Автомобиль застрахован на сумму 16 000 у.е. Размер ущерба 18 000 у.е. Найти страховое возмещение по системе первого риска.

**Решение.** Поскольку размер ущерба превышает страховую сумму, то страховое возмещение равно страховой сумме и составляет 16 000 у.е.

**Ответ:** 16 000 у.е.

## 1.3 Система пропорционального возмещения ущерба в случае неполного страхования

*Неполным страхованием (недострахованием)* называют страхование, при котором объект страхуется на сумму, меньшую его реальной стоимости.

Если, в соответствии со страховым договором с неполным страхованием, возмещение ущерба осуществляется *по системе пропорционального возмещения ущерба*, то размер страхового возмещения ущерба вычисляется по формуле

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Страховое}\\ \text{возмещение}\end{matrix}} = \frac{\boxed{\begin{matrix}\text{Страховая}\\ \text{сумма}\end{matrix}}}{\boxed{\begin{matrix}\text{Цена}\\ \text{объекта}\end{matrix}}} \cdot \boxed{\begin{matrix}\text{Размер}\\ \text{ущерба}\end{matrix}} \qquad (1.3.1)$$

и, конечно же, не может превышать размера ущерба.

Другими словами, если, например, страховая сумма составляет 70% реальной цены объекта страхования, то и страховое возмещение составит 70% ущерба. Оставшаяся часть ущерба (в данном случае 30%) *остается на риске страхователя*.

Долю ущерба, остающуюся на риске страхователя, называют *собственным удержанием страхователя*.

**Пример 1.3.1.** Автомобиль, стоимостью 20 000 у.е., застрахован на сумму 16 000 у.е. Величина ущерба 12 000 у.е. Найти страховое возмещение по системе пропорционального возмещения ущерба.

**Решение.** Обозначим, в соответствии со сложившейся традицией, страховое возмещение символом $Sb$. В силу соотношения (1.3.1)

$$Sb = \frac{16000}{20000} \cdot 12000 = 9600 .$$

**Ответ:** 9600 у.е.

## *1.4 Система возмещения ущерба, предусматривающая франшизу*

В случае неполного страхования, описанного в предыдущем пункте, рассматривалась одна из систем страхового обеспечения, при которой, в соответствии с условиями страхового договора, часть убытков страхователя не подлежала возмещению страховщиком.

Часть убытков страхователя не подлежит возмещению страховщиком так же и в том случае, когда страховой договор предусматривает *франшизу*.

Точнее говоря, *франшизой* и называют определенную часть убытков страхователя, не подлежащую возмещению страховщиком в соответствии с условиями заключенного страхового договора, однако страховые договоры, предусматривающие франшизу, отличаются от договоров неполного страхования.

*Франшиза* устанавливается в *конкретной денежной сумме* или в *проценте от суммы страхового возмещения* и может быть *условной* или *безусловной*.

При *условной* франшизе страховщик *не возмещает ущерб, размер которого не превышает* франшизы. Если же *размер ущерба превышает* франшизу, то *он возмещается полностью*.

При *безусловной* франшизе, так же как и при условной франшизе, страховщик *не возмещает ущерб, размер которого не превышает* франшизы. Если же *размер ущерба превышает* франшизу, то страховое возмещение равно *разности между размером ущерба и франшизой*.

Понятие франшизы и было введено в страхование для того, чтобы освободить страховщика от возмещения незначительных ущербов в размере действующей франшизы. Как правило, для незначительных ущербов размер франшизы примерно соответствует затратам страховщика по определению размера ущерба.

**Пример 1.4.1.** Условная франшиза равна 5 000 руб., а размер ущерба 4 000 руб. Найти страховое возмещение.

**Решение.** Поскольку размер ущерба меньше условной франшизы, то он не возмещается.

**Ответ:** Ущерб не возмещается.

**Пример 1.4.2.** Условная франшиза равна 5 000 руб., а размер ущерба 6 000 руб. Найти страховое возмещение.

**Решение.** Поскольку размер ущерба превышает условную франшизу, то он возмещается в полном объеме, и возмещение составляет 6 000 руб.

**Ответ:** 6 000 руб.

**Пример 1.4.3.** Безусловная франшиза равна 5 000 руб., а размер ущерба 4 000 руб. Найти страховое возмещение.

**Решение.** Поскольку размер ущерба меньше безусловной франшизы, то он не возмещается.

**Ответ:** Ущерб не возмещается.

**Пример 1.4.4.** Безусловная франшиза равна 5 000 руб., а размер ущерба 6 000 руб. Найти страховое возмещение.

**Решение.** Страховое возмещение определяется при помощи вычитания:

$$6\,000 \text{ руб.} - 5\,000 \text{ руб.} = 1\,000 \text{ руб.}$$

**Ответ:** 1000 руб.

## *1.5 Страхование предпринимательского риска по системе предельной ответственности*

Страхование предпринимательского риска по системе предельной ответственности осуществляется в соответствии со следующей схемой:

**1.** Страхователь и страховщик на основании экспертных заключений, а также статистических данных, накопленных на протяжении ряда лет, *прогнозируют* доход от будущей страхуемой предпринимательской деятельности;

**2.** Если по прошествии указанного в страховом договоре промежутка времени полученный от застрахованной предпринимательской деятельности доход *не меньше спрогнозированного*, то считается, что страхового события не было, и страховое возмещение не выплачивается;

**3.** Если же по прошествии указанного в страховом договоре промежутка времени полученный от застрахованной предпринимательской деятельности доход *меньше спрогнозированного*, то вычисляется *ущерб* от предпринимательской деятельности по формуле

$$\boxed{\text{Ущерб}} = \boxed{\begin{matrix}\text{Прогнозируемый}\\ \text{доход}\end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix}\text{Полученный}\\ \text{доход}\end{matrix}}, \qquad (1.5.1)$$

причем в этой формуле полученный доход может принимать, как положительные, так и отрицательные значения (расход);

**4.** Если предел ответственности страховщика установлен в размере $a\,\%$, то страховое возмещение рассчитывается по формуле

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Страховое}\\ \text{возмещение}\end{array}} = \boxed{\text{Ущерб}} \cdot \frac{a}{100}. \qquad (1.5.2)$$

**Пример 1.5.1.** Компьютерная фирма застраховала по системе предельной ответственности доход от производства и продажи 10000 ноутбуков, причем предел ответственности страховщика установлен в размере $40\,\%$ ущерба. Со страховщиком была согласована средняя цена реализации одного ноутбука – 1460 у.е., однако 2000 ноутбуков было реализовано по цене 1500 у.е., 3000 ноутбуков реализованы по цене 1450 у.е., а 5000 ноутбуков реализованы по цене 1400 у.е. Найти страховое возмещение.

**Решение.** Доход $D$ от реализации ноутбуков спрогнозирован в размере

$$D = 10\,000 \cdot 1460 = 14\,600\,000 \,(\text{у.е.})$$

В действительности же фирма реализовала эти ноутбуки на сумму

$$R = 2\,000 \cdot 1500 + 3000 \cdot 1450 + 5000 \cdot 1400 = 14\,350\,000 \,(\text{у.е.})$$

Найдем ущерб $U$ по формуле (1.5.1):

$$U = D - R = 14\,600\,000 - 14\,350\,000 = 250\,000 \,(\text{у.е.}).$$

Теперь по формуле (1.5.2) найдем страховое возмещение $Sb$:

$$Sb = 250\,000 \cdot 0{,}4 = 100\,000 \,(\text{у.е.})$$

**Ответ:** 100 000 у.е.

**Пример 1.5.2.** Банк предоставил клиенту кредит в размере 100 000 рублей сроком на 1 год с годовой процентной ставкой 10%. Риск невозврата кредита застрахован по системе предельной ответственности, причем предел ответственности страховщика установлен в размере $30\,\%$ ущерба. Найти страховое возмещение в случае невозврата кредита.

**Решение.** Сначала найдем ущерб $U$, нанесенный банку в случае невозврата кредита. В соответствии с формулой (1.5.1)

$$U = 100\,000 \cdot 0{,}1 - (-100\,000) = 110\,000\,(\text{руб.})\,.$$

Теперь по формуле (1.2.2) найдем страховое возмещение $Sb$:

$$Sb = 110\,000 \cdot 0{,}3 = 33\,000\,(\text{руб.})$$

**Ответ:** $33\,000$ рублей.

**Задача 1.5.3.** Заемщик 01.01.07. взял в банке кредит на сумму $ 800000 сроком на 1 год с годовой процентной ставкой 21%. Погашение кредита (вместе с процентными деньгами) должно осуществляться ежеквартально в равных долях. Банк застраховал риск непогашения кредита. Предел ответственности страховщика – 90%, страховая премия составляет 3,5% от страховой суммы. Страховая премия уплачивается в рассрочку при помощи ежеквартальных страховых взносов, комиссия за рассрочку не взимается. Составить график страховых взносов.

**Решение.** Определим сначала общую сумму $K$, которую заемщик должен возвратить банку, и процентные деньги $P$:

$$K = 800\,000 \cdot 1{,}21 = 968\,000\ ,$$

$$P = 800\,000 \cdot 0{,}21 = 168\,000\ .$$

Ежеквартально заемщик должен погашать основной долг в сумме

$$\frac{K}{4} = \frac{800\,000}{4} = 200\,000,$$

а процентные деньги – в сумме

$$\frac{P}{4} = \frac{168\,000}{4} = 42\,000\,.$$

Теперь можно составить график погашения кредита (Таблица 1.5.1).

Т а б л и ц а 1.5.1. График погашения кредита

| Дата | 31.03 | 30.06 | 30.09 | 31.12 |
|---|---|---|---|---|
| **Погашение основного долга** | 200000 | 200000 | 200000 | 200000 |
| **Общая сумма основного долга** | | | | 800000 |
| **Погашение процентных денег** | 42000 | 42000 | 42000 | 42000 |
| **Общая сумма процентных денег** | | | | 168000 |
| **Сумма к погашению** | 242000 | 242000 | 242000 | 242000 |
| **Общая возвращаемая сумма** | | | | 968000 |

Расчет страховых взносов также удобно свести в таблицу (Таблица 1.5.2).

Т а б л и ц а 1.5.2. Расчет страховых взносов

| Дата | 31.01 | 31.03 | 30.06 | 30.09 | 31.12 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Задолженность по основному долгу** | 800000 | 600000 | 400000 | 200000 | 0 |
| **Задолженность по процентным деньгам** | 168000 | 126000 | 84000 | 42000 | 0 |
| **Общая задолженность** | 968000 | 726000 | 484000 | 242000 | 0 |
| **Страховая сумма** | 871200 | 653400 | 435600 | 217800 | 0 |
| **Страховой взнос** | 30492 | 22869 | 15246 | 7623 | 0 |
| **Страховая премия** | | | | | 76230 |

В Таблице 1.5.2. числовые данные строк «Задолженность по основному долгу», «Задолженность по процентным деньгам» и «Общая задолженность» получены, исходя из того, что погашение кредита (вместе с процентными деньгами) должно осуществляться ежеквартально в равных долях.

Числовые данные строки «Страховая сумма» получены из числовых данных строки «Общая задолженность» при помощи умножения на число 0,9 (предел ответственности страховщика – 90%).

Числовые данные строки «Страховой взнос» получены из числовых данных строки «Страховая сумма» при помощи умножения на число 0,035 (страховой тариф – 3,5%).

Числовое данное в строке «Страховая премия» получено при помощи суммирования числовых данных строки «Страховой взнос».

Сведя строки «Страховой взнос» и «Страховая премия» в отдельную Таблицу 1.5.3., получим ответ задачи.

**Ответ:** График страховых взносов приведен в Таблице 1.5.3.

Т а б л и ц а 1.5.3. График страховых взносов

| **Дата** | **31.01** | **31.03** | **30.06** | **30.09** | **31.12** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Страховой взнос** | 30492 | 22869 | 15266 | 7623 | 0 |
| **Страховая премия** | 76230 | | | | |

## *1.6 Сострахование*

*Сострахованием* называют такую систему страховой ответственности, при которой объект страхуется *по одному страховому договору* совместно несколькими страховщиками (состраховщиками).

Если в договоре о состраховании не оговорено противное, то состраховщики *солидарно* отвечают перед страхователем (выгодоприобретателем).

Законом также допускается возможность, при которой состраховщики отвечают за страхование, исходя из долей, принятых к ответственности каждым из них.

Для возмещения ущерба при сострахования может применяться система первого риска, система пропорциональной ответственности, а также франшиза.

Отметим особо, что договоры сострахования встречаются крайне редко. Во-первых, они очень трудоемки в обслуживании, поскольку в них предусмотрена множественная ответственность страховщиков. Во-вторых, они не улучшают имиджа страховщиков, так как создается впечатление, что ни один из страховщиков не хочет (или не может) принять на себя ответственность за весь риск.

По этой причине крупные риски, как правило, страхуются не по системе сострахования, а по системе *перестрахования*, которую мы обсудим в дальнейшем.

**Пример 1.6.1.** Объект, стоимостью 600 000 руб., застрахован на условиях сострахования тремя страховщиками $C_1$, $C_2$, $C_3$, доли которых равны 250 000 руб., 150 000 руб. и 100 000 руб. соответственно. Ущерб, возникший в результате страхового события, составил 200 000 руб. Найти страховое возмещение, выплачиваемое каждым из страховщиков, если применяется система пропорциональной ответственности.

**Решение.** Найдем сначала размер $S$ суммарной ответственности сострахователей:

$$S = 250000 + 150000 + 100000 = 500000\,(\text{руб.}).$$

Теперь найдем размер $Sb_1$ страхового возмещения страховщика $C_1$:

$$Sb_1 = \frac{250000}{500000} \cdot 200000 = 100000\,(\text{руб.})$$

Аналогично вычисляются размеры $Sb_2$ и $Sb_3$ страховых возмещений страховщиков $C_2$ и $C_3$ соответственно:

$$Sb_2 = \frac{150000}{500000} \cdot 200000 = 60000\,(\text{руб.}),$$

$$Sb_3 = \frac{100000}{500000} \cdot 200000 = 40000\,(\text{руб.}).$$

**Ответ:** 100000 рублей, 60000 рублей, 40000 рублей.

### *1.7 Двойное (множественное) страхование*

*Двойным страхованием* называют такую систему страховой ответственности, при которой *один и тот же объект* страхуется *по двум или более страховым договорам* несколькими страховщиками.

В отличие от *сострахования,* при *двойном страховании* возможна ситуация, когда *суммарное страховое покрытие* объекта страхования по всем страховым договорам *превышает реальную стоимость* объекта страхования, и страхователь может получить необоснованную выгоду от наступления страхового события.

Поскольку страхование не является средством обогащения, в ряде стран двойное страхование запрещено законодательством или предусмотрены специальные оговорки, препятствующие возникновению необоснованной выгоды у страхователя.

В соответствии с Российским законодательством страхователь обязан поставить в известность страховщика обо всех заключенных страховых договорах в отношении страхуемого имущества. Кроме того, в Российском законодательстве, в соответствии с принципом страхового возмещения ущерба, установлено следующее.

Страховое возмещение ущерба, вне зависимости от числа приобретенных страхователем страховых полисов, не может превышать размера ущерба, понесенного страхователем, и для каждого страховщика определяется пропорционально отношению страховой суммы по заключенному им договору к общей страховой сумме по всем заключенным договорам по данному объекту.

**Пример 1.7.1.** Страхователь застраховал объект, стоимостью 450 000 у.е., у трех страховщиков $C_1$, $C_2$, $C_3$ на суммы 100 000 у.е., 200 000 у.е. и 300 000 у.е. соответственно. В результате наступления страхового события объект был уничтожен полностью. Найти страховое возмещение, выплачиваемое каждым из страховщиков.

**Решение.** Найдем сначала размер $S$ суммарной ответственности страховщиков:

$$S = 100000 + 200000 + 300000 = 600000 \, (\text{у.е.}).$$

Заметим, что размер суммарной ответственности страховщиков значительно превышает стоимость объекта, и найдем размер $Sb_1$ страхового возмещения страховщика $\text{С}_1$:

$$Sb_1 = \frac{100000}{600000} \cdot 450000 = 75000 \, (\text{у.е.})$$

Аналогично вычисляются размеры $Sb_2$ и $Sb_3$ страховых возмещений страховщиков $\text{С}_2$ и $\text{С}_3$ соответственно:

$$Sb_2 = \frac{200000}{600000} \cdot 450000 = 150000 \, (\text{у.е.}),$$

$$Sb_3 = \frac{300000}{600000} \cdot 450000 = 225000 \, (\text{у.е.}).$$

Как и следовало ожидать, сумма всех страховых возмещений совпадает с размером ущерба.

**Ответ:** 75 000 у.е., 150 000 у.е., 225 000 у.е.

# 2 Взаиморасчеты Сторон в договорах о перестраховании

## *2.1 Основные определения и термины*

*Перестрахованием (цессией)* называют страхование одним *страховщиком (перестрахователем)* на определенных договором условиях *исполнения всех или части своих обязательств* перед страхователем у *другого страховщика (перестраховщика)*.

Синонимом термина «*перестрахователь*» является термин «*цедент*», а термин «*цессионарий*» – синоним термина «*перестраховщик*».

*Страховщик – перестрахователь* обладает всеми правами и обязанностями *страхователя* в отношении *страховщика – перестраховщика* по договору перестрахования и уплачивает перестраховщику за перестрахование страховую премию (*перестраховочную премию*), которая является частью страховой премии, полученной страховщиком – перестрахователем от страхователя по договору первичного страхования.

Таким образом, страховая премия, уплаченная за страхование, при перестраховании *распределяется* между перестрахователем и перестраховщиком.

В то же время *перестрахователь* при уплате перестраховочной премии *удерживает* из нее в качестве компенсации своих расходов по заключению и ведению договора первичного страхования *перестраховочную комиссию*.

*Страховщик – перестрахователь*, несмотря на заключенный перестраховочный договор, *остается ответственным* за предоставление страховых выплат страхователю по договору первичного страхования и может даже не извещать его о факте перестрахования.

Приняв риск в перестрахование, перестраховщик, если риск для него является слишком крупным, может в свою очередь *перестраховать его у третьего страховщика*. В результате возникает страховая система, которую называют *ретроцессией*, второго перестрахователя называют *ретроцедентом*, а второго перестраховщика – *ретроцессионарием*.

## 2.2 Типы договоров о перестраховании

Договоры о перестраховании делятся на следующие типы:

- Договоры факультативного перестрахования;
- Договоры облигаторного перестрахования;
- Договоры факультативно-облигаторного перестрахования;
- Договоры облигаторно-факультативного перестрахования.

Использованный в названиях этих договоров термин «*факультатив*» является синонимом слова «*выбор*», а термин «*облигаторный*» – синоним слова «*обязательный*».

В случае *факультативного перестрахования* перестрахователь самостоятельно выбирает перестраховщика и решает, будет ли он передавать риск в перестрахование полностью или частично. При этом он не имеет никаких обязательств в отношении перестраховщиков, которым предлагает риски в перестрахование. В свою очередь перестраховщики не имеют никаких обязательств в отношении перестрахователя и могут принять риск полностью или частично, вообще отказаться от приема риска или выдвинуть встречное условие.

*Облигаторное перестрахование* осуществляется на основе долгосрочного договора, обязывающего перестрахователя перестраховывать определенные риски у конкретного перестраховщика, а перестраховщика – к их принятию.

Одним из вариантов облигаторного перестрахования является перестрахование *первоочередных или приоритетных рисков.*

Соглашение о перестраховании первоочередных или приоритетных рисков компании не является особой формой договора, но часто используется с целью перестрахования части рисков еще до того, как будут производиться перестрахования по основным договорам компании.

Перестрахования первоочередных или приоритетных рисков могут внести дисбаланс в другие договоры компаний, а также чреваты (как и любые автоматические перестрахования) аккумуляцией рисков, что приводит к необходимости новой, дополнительной перестраховочной защиты.

По этой причине перестрахования первоочередных или приоритетных рисков обычно осуществляются совместно с компаниями, принадлежащими к одной финансовой группе.

Договор *факультативно-облигаторного перестрахования* обязывает перестраховщика принимать в перестрахование от конкретного перестрахователя определенные риски или доли рисков. В то же время перестрахователь самостоятельно выбирает перестраховщиков и решает, будет ли он передавать риски в перестрахование полностью или частично.

Одним из вариантов факультативно-облигаторного договора с дополнительными условиями является *почтовый ковер* (покрытие).

Этот договор основан на том, что соглашение между перестрахователем и перестраховщиком определяет лишь основные моменты перестрахования.

Например, перестрахователь предлагает отдельные риски на перестрахование, а перестраховщик, рассматривая каждый конкретный риск, принимает решение принять его, отклонить или изменить предложенные условия, однако *в течение этого периода времени риск считается перестрахованным.*

*Облигаторно-факультативный* договор обязывает перестрахователя предлагать на перестрахование определенные риски или доли рисков конкретному перестраховщику, а перестраховщику предоставляет право принять их или отказаться от них.

За передачу в перестрахование доброкачественного страхового риска в договорах перестрахования обычно предусмотрено комиссионное вознаграждение (*тантьема*), которое перестраховщик выплачивает перестрахователю. Как правило, тантьема выплачивается ежегодно в определенном проценте от суммы чистой прибыли перестраховщика.

Описанные договоры о перестраховании также предусматривают одну из двух систем *ответственности* перестраховщика перед перестрахователем**:** *пропорциональную* или *непропорциональную*.

К изложению этих систем ответственности мы сейчас и переходим.

## *2.3 Пропорциональная система ответственности перестраховщика*

Договоры пропорционального перестрахования делятся на следующие типы:

- Договоры о перестраховании на базе квоты (квотные договоры);
- Договоры о перестраховании эксцедента суммы (эксцедентные договоры);
- Квотно-эксцедентные договоры.

Использованный в названиях этих договоров термин «эксцедент» – синоним слова «превышение».

### 2.3.1 Квотный договор

Квотный договор является наиболее простой формой пропорционального перестраховочного договора.

По условиям квотного договора страховщик – перестрахователь передает перестраховщику *согласованную долю всех принятых им рисков* по определенному виду страхования или группе смежных страхований. *В этой же доле* перестраховщик получает и перестраховочную премию.

В тех случаях, когда страховые суммы по принятым страховщиком рискам могут быть чрезмерно большими, перестраховщик *ограничивает свою ответственность в договоре определенными лимитами*.

Перестрахователь по квотному договору получает перестраховочную комиссию, размером 20—40%, в зависимости от вида страхования.

Квотный перестраховочный договор дает ряд преимуществ цеденту:

- На собственном удержании перестрахователя может оставаться такая доля ответственности, которая полностью соответствует его финансовым возможностям.
- Размер перестраховочной комиссии, обычно составляющей пропорциональную долю перестраховщика в расходах перестрахователя, увеличивается на дополнительную сумму непредвиденных расходов.

- По условиям квотных договоров передающая компания удерживает на время до окончания действия договора часть причитающейся перестраховщику премии в качестве резервов убытков и премий. По ним в пользу перестраховщика начисляются проценты, которые обычно ниже банковских. За счет разницы в процентах передающее общество имеет определенный доход.
- Причитающиеся перестраховщику суммы выплачиваются после обработки, закрытия и подтверждения перестраховщиком соответствующего счета. Таким образом, полученная страховщиком премия какое-то время находится в его обороте.
- Квотные договоры требуют минимальных затрат времени и средств на технические, административные и другие операции, связанные с их обслуживанием.

Несмотря на описанные преимущества, квотное перестрахование не решает целиком тех задач, которые хотел бы решить страховщик, приступая к перестрахованию своего портфеля.

Квотное перестрахование действительно уменьшает риск цедента по всем договорам, переданным в перестрахование, однако не влечет за собой достаточного выравнивания оставшейся части страхового портфеля, которая связана с собственным участием цедента в покрытии рисков.

Основным недостатком является то обстоятельство, что по квотному договору передаются на перестрахование и доли от тех мелких рисков, которые в иных случаях передающая компания могла бы держать на своей ответственности и, тем самым, сохранила бы у себя соответствующую долю страховой премии.

**Пример 2.3.1.** По договору квотного перестрахования перестраховщик принимает на свою ответственность 30% страховой суммы по каждому договору страхования имущества предприятий, но не более 3 млн. у.е. Цедент заключил три договора страхования имущества $D_1$, $D_2$, $D_3$ на суммы 8, 10 и 12 млн.

у.е. соответственно. Определить участие цедента и цессионария в покрытии рисков.

**Решение.** Сначала определим покрытия рисков $R_1$, $R_2$, $R_3$ цессионарием в договорах $\mathrm{D}_1$, $\mathrm{D}_2$, $\mathrm{D}_3$ соответственно.

Поскольку

$$\begin{aligned} 8\cdot 0{,}3 &= 2{,}4 < 3(\text{млн.у.е.}),\\ 10\cdot 0{,}3 &= 3(\text{млн.у.е.}),\\ 12\cdot 0{,}3 &= 3{,}6 > 3(\text{млн.у.е.}), \end{aligned}$$

а 3 млн. у.е. является лимитом покрытия перестраховщика, то перестраховщик при перестраховании третьего риска возьмет на свою ответственность только 3 млн. у.е., т.е. всего лишь 25% страховой суммы.

Таким образом,

$$\begin{aligned} R_1 &= 2{,}4(\text{млн.у.е.}),\\ R_2 &= 3(\text{млн.у.е.}),\\ R_3 &= 3(\text{млн.у.е.}). \end{aligned}$$

Теперь мы можем определить покрытия рисков $U_1$, $U_2$, $U_3$ цедентом в договорах $\mathrm{D}_1$, $\mathrm{D}_2$, $\mathrm{D}_3$ соответственно.

$$\begin{aligned} U_1 &= 8 - R_1 = 8 - 2{,}4 = 5{,}6(\text{млн.у.е.}),\\ U_2 &= 10 - R_2 = 10 - 3 = 7(\text{млн.у.е.}),\\ U_3 &= 12 - R_3 = 12 - 3 = 9(\text{млн.у.е.}). \end{aligned}$$

**Ответ.** Цедент покрывает $5{,}6(\text{млн.у.е.})$, $7(\text{млн.у.е.})$, $10(\text{млн.у.е.})$, цессионарий покрывает $2{,}4(\text{млн.у.е.})$, $3(\text{млн.у.е.})$, $3(\text{млн.у.е.})$.

### 2.3.2 Договор о перестраховании эксцедента суммы (эксцедентный договор)

Эксцедентный договор – наиболее распространенная форма пропорциональных договоров.

При эксцедентном перестраховании цедент передает, а перестраховщик принимает в перестрахование только те договоры страхования, страховая сумма по которым превышает оговоренную величину – *размер собственного удержания (приоритет) цедента*.

*Лимит собственного удержания передающая компания* устанавливает в определенной сумме, относящейся ко всем страховым рискам по одному виду страхования: суда, жилые дома и т.д.

*Перестраховщик* принимает на себя обязательства по оставшейся части страховой суммы, называемой *эксцедентом*, но *в пределах установленного лимита*.

Максимальная величина перестраховочной суммы устанавливается в размере, *кратном величине приоритета цедента*, который носит название *линии*.

Например, если на страхование принят риск со страховой суммой 220 000 долларов, а собственное удержание передающей компании определено в 20 000 долларов, то 200 000 долларов составит сумму эксцедента, которая передается перестраховщикам. В данном случае эксцедент разбит на 10 линий, и, в частности, при 2-х линиях участия перестраховщика его ответственность составит 40 000 долларов, т.е. 1/5 от 200 000 долларов. При участии перестраховщика в 1/2 линии его ответственность составит 10 000 долларов, т.е. 1/20 от 200 000 долларов.

Эксцедентная форма перестрахования предоставляет широкую возможность страховщику для создания страхового портфеля, состоящего из значительного количества однородных по величине рисков.

Пропорционально сумме собственного удержания передающей компании и долям участия перестраховщиков в договоре и производится распределение прибыли и оплата убытков.

По условиям эксцедентного договора передающая компания так же, как и по квотному договору, удерживает в свою пользу перестраховочную комиссию и участвует в прибыли перестраховщика, однако перестраховочная комиссия меньше, чем при квотном договоре.

В зависимости от характера рисков, передающая компания может устанавливать *дифференцированное собственное удержание*, что оформляется специальным приложением к перестраховочному договору, которое называется *таблицей лимитов собственного удержания*.

В эксцедентном перестраховочном договоре для передающей компании содержится ряд достоинств:

- Передающая компания имеет возможность устанавливать лимит собственного удержания с учетом своих финансовых возможностей.
- Вне зависимости от того, устанавливается ли единое собственное удержание или оно определяется таблицей лимитов собственного удержания, передающая компания может оставлять на своей ответственности все наиболее мелкие риски.
- Размер собственного удержания всегда может быть пересмотрен в сторону увеличения.

К недостаткам следует отнести необходимость обработки каждого риска, включающей расчет распределения сумм ответственности, премии, оплачиваемых убытков и т. п. между передающей компанией и перестраховщиками (при квотном договоре под перестрахование автоматически попадают все риски в определенной доле).

Отрицательным моментом для перестраховщиков является то обстоятельство, что при дифференцированном собственном удержании (по таблице) существует потенциальная предпосылка к передаче перестраховщикам наиболее опасных рисков.

Обслуживание договоров эксцедентного перестрахования требует значительных трудовых затрат со стороны цедента. Это связано с необходимостью индивидуального изучения каждого страхового договора, часть рисков которого передается в перестрахование. Трудозатраты выражаются в выделении групп объектов страхования, которые в результате одного и того же стихийного бедствия могут быть частично повреждены или полностью уничтожены. Одновременно делается оценка максимально возможного ущерба по каждому риску.

Несмотря на эти технические трудности, договоры эксцедентного перестрахования применяются на практике значительно чаще, чем договоры квотного перестрахования, так как являются более выгодными для цедента. Эти преимущества выражены в том, что обеспечивают максимальное выравнивание страхового портфеля, оставляемого на собственном риске цедента.

Кроме того, в рамках договора эксцедентного перестрахования меньшая сумма страховых платежей передается перестраховщику.

В случае эксцедентных договоров цедент имеет возможность удерживать на собственном участии всю совокупность мелких страховых рисков.

**Пример 2.3.2.** Приоритет цедента установлен в размере 1 млн. у.е. Эксцедент составляет 4 линии. Лимит ответственности перестраховщика – 4 млн. у.е. Найти размер ответственности перестраховщика в договорах страхования $D_1$, $D_2$, $D_3$ на суммы 4 млн. у.е., 5 млн. у.е, 6 млн. у.е. соответственно.

**Решение.** Так как размер собственного удержания цедента равен 1 млн. у.е., а эксцедент составляет четырехкратную сумму собственного удержания, то перестраховщик будет нести следующие обязательства:

1. По договору $D_1$ ответственность цессионария составит 3 млн. у.е.;
2. По договору $D_2$ ответственность цессионария составит 4 млн. у.е.;
3. По договору $D_3$ ответственность цессионария составит 4 млн. у.е.

**Ответ:** 3 млн. у.е., 4 млн. у.е. и 4 млн. у.е.

**Замечание.** Если эксцедент превышает лимит ответственности перестраховщика, то необходимо заключить договоры перестрахования с другими перестраховщиками (договоры второго эксцедента, третьего эксцедента и т.д.).

**Пример 2.3.3.** Приоритет страховщика составляет 1 млн. долл. Лимит ответственности цессионария – 3 линии. Лимит ответственности ретроцессионария – 5 линий (сверх покрытия цессионария). Найти распределение ответственности Сторон по договору страхования со страховой суммой 8 млн. долл.

**Решение.** Ответственность сторон распределится так:

- 1 млн. долл. (12,5%) придется на долю цедента;
- 3 млн. долл. (37,5%) придется на долю цессионария;
- 4 млн. долл. (50%) придется на долю ретроцессионария.

**Ответ:** 12,5%, 37,5%, 50%.

**Замечание.** В такой же пропорции будут делиться между Сторонами страховая премия и страховые выплаты при наступлении страхового случая.

К типу эксцедентных договоров относится также и *договор открытого покрытия* (*открытый ковер*).

*Открытый ковер* – это соглашение между перестрахователем и перестраховщиком о том, что перестраховщик берет на себя обязанность на определенный срок (как правило, на год) автоматически покрывать перестрахованием строго определенные риски.

Таким образом, это соглашение факультативно для перестрахователя и облигаторно для перестраховщика.

Открытый ковер необходим для перестрахования рисков, которые носят периодический характер, и страховая сумма увеличивается внезапно, в определенное время года, например, в период активного судоходства.

Конечно, перестрахование таких рисков можно было бы осуществить и на основании договоров других типов. Но, как правило, подобные договоры составляются и размещаются в конце года, а потребность в перестраховании возникает в течение года.

Возможно, по этой причине современное перестрахование не может обойтись без договоров открытого покрытия.

### 2.3.3 Квотно-эксцедентный договор

Квотно-эксцедентный договор является комбинацией двух описанных выше видов перестраховочных договоров и используется на практике достаточно редко.

В этом договоре приоритет цедента устанавливается в форме согласованной квоты, а эксцедент принимается в сумме, кратной собственному удержанию цедента.

Квотно-эксцедентные договоры применяются в отношениях с теми цессионариями, с которыми цедент уже вел дела ранее, поскольку этот вид договоров гораздо более прост в обслуживании и позволяет экономить средства, и могут быть специально приспособлены для удовлетворения требований цедента.

Комбинированные договоры квотно-эксцедентного типа могут оказаться необходимыми в течение первоначального периода деятельности компании, а также в случае, когда компания расширяет свой бизнес за счет новых для нее видов страхования.

В заключение этого параграфа отметим, что в пропорциональной системе

$$\boxed{\text{Перестраховочная премия}} = \frac{\boxed{\text{Ответственность перестраховщика перед перестрахователем в денежном выражении}}}{\boxed{\text{Ответственность страховщика по первичному страховому договору в денежном выражении}}} \cdot \boxed{\text{Страховая премия по первичному страховому договору}}, \qquad (2.3.1)$$

что полностью соответствует *принципу эквивалентности рисков страховщика и страхователя.*

## *2.4 Непропорциональная система ответственности перестраховщика*

Характерной чертой пропорционального перестрахования, рассмотренного выше, является то, что убытки, выплаченные по перестрахованным договорам, распределяются между цедентом и перестраховщиком в пропорции, соответствующей распределению страховых сумм и премий.

Сущность *непропорционального перестрахования* состоит в том, что выплаты перестраховщика определяются исключительно *величиной убытка*, то есть пропорциональное разделение отдельного риска и полученной за него премии между цедентом и цессионарием не применяется.

Перестраховочная премия по этому виду перестрахования определяется обычно как процент годовой премии, полученной цедентом по принятому на страхование и переданному в перестрахование портфелю.

Непропорциональное перестрахование чаще всего применяется по договорам страхования гражданской ответственности владельцев транспортных средств за ущерб, причиненный третьим лицам в результате ДТП. Оно применяется также во всех видах страхования, где нет верхней границы ответственности страховщика.

*В случае непропорционального перестрахования перестрахователь сам оплачивает все убытки до согласованного в договоре размера, а превышение над этим размером подлежит оплате перестраховщиком, для которого также устанавливается предел ответственности.*

Договоры непропорционального перестрахования могут быть заключены, как в факультативной, так и в облигаторной форме.

Побудительный мотив к развитию непропорционального перестрахования со стороны цедента – создать определенные гарантии своей устойчивости при возмещении малого количества исключительно крупных убытков или большого количества исключительно мелких убытков.

Существуют две основные схемы непропорционального перестрахования:

- Перестрахование превышения (эксцедента) убытка;
- Перестрахование превышения (эксцедента) убыточности.

### 2.4.1 Договор о перестраховании эксцедента убытка

Договоры о *перестраховании эксцедента убытка* обычно заключаются в облигаторной форме и используются тогда, когда страховщик стремится не к выравниванию отдельных рисков данного вида, а непосредственно к обеспечению финансового равновесия страховых операций в целом.

В условиях договора о перестраховании эксцедента убытка последовательно перечисляются риски, подлежащие перестрахованию, а также те риски, которые не входят в этот договор.

Исходя из условий договора, перестраховщик принимает обязательство покрытия той части убытка, которая превышает установленную сумму собственного участия цедента, но не превышает установленной в договоре суммы, составляющей верхнюю границу ответственности перестраховщика.

Договоры о перестраховании эксцедента убытка в первую очередь относятся к ущербам, причиненным многим страхователям одним большим страховым событием. Например, наводнение повредило имущество многих страхователей. В этой ситуации применяется понятие «*групповой ущерб*», и обязательства страховщика устанавливаются применительно к нему.

Договоры о перестраховании эксцедента убытка обычно заключаются на срок в один год без оговорки о продлении срока действия.

Применимость договора о перестраховании эксцедента убытка в большой степени зависит от специфических черт конкретного вида страхования, особенностей страхового портфеля, подлежащего перестрахованию, и адекватности размера премии объему страхового покрытия.

Довольно часто перестрахование эксцедента убытка используется в таких отраслях страхования, где, как правило, возможны убытки лишь небольшого и среднего размера, а крупные убытки являются исключением.

Нередко договоры перестрахования эксцедента убытка заключаются в дополнение или в совокупности с договорами квотного и эксцедентного перестрахования.

Цедент и перестраховщик, участвующие в договоре квотного или эксцедентного перестрахования, могут осуществлять перестрахование эксцедента убытка за их общий счет. В этой ситуации они должны оплачивать страховую премию за риск превышения убытка страховщика в соответствии с их долями, а при возникновении страхового случая получат соответствующее возмещение от перестраховщика эксцедента убытка.

**Пример 2.4.1.** По договору перестрахования эксцедента убытка приоритет цедента предусмотрен в размере 3 млн. долларов, а лимит перестраховочного покрытия цессионария – 2 млн. долларов Цедент в результате наступления страхового события выплатил страхователю страховое возмещение в сумме 4 млн. долларов. Найти сумму возмещения убытков цессионарием цеденту.

**Решение.** Цеденту самому придется оплатить убыток в размере 3 млн. долларов, а цессионарий возместит цеденту убытки в размере 1 млн. долларов
(1 млн. = 2 млн. – (4 млн. – 3 млн.)).

**Ответ:** 1 млн. долларов.

### 2.4.2 Договор о перестраховании эксцедента убыточности

Договоры о перестраховании эксцедента убыточности относятся исключительно к той части страхового портфеля страховщика, которая имеет превышение убыточности, и защищают финансовые интересы страховщика от ее последствий.

Причиной крупной убыточности может быть возникновение малого числа весьма крупных убытков или значительного числа мелких убытков.

Договоры о перестраховании эксцедента убыточности могут оформляться самостоятельными контрактами или выступать в качестве дополнения к договорам эксцедентного перестрахования.

Договоры о перестраховании эксцедента убыточности используются достаточно редко, поскольку содержат значительный риск для перестраховщика, не имеющего возможности контролировать страховую политику цедента.

Страховые выплаты по эти договорам зависят от *уровня выплат* страховщика за определенный период времени (как правило, за 1 год).

*Уровнем выплат* страховщика называют величину, определяемую в процентах в соответствии со следующей формулой:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Уровень}\\ \text{выплат}\end{array}} = \frac{\boxed{\begin{array}{c}\text{Объем страховых}\\ \text{выплат}\end{array}}}{\boxed{\begin{array}{c}\text{Объем страховых}\\ \text{премий}\end{array}}} \cdot 100\% \,. \qquad (2.4.2)$$

В соответствии со стандартным договором о перестраховании эксцедента убыточности перестраховщик обязан произвести выплаты в пользу цедента в том случае, если *уровень выплат* цедента по договорам страхования *превысит установленный предел*.

При этом размер ответственности перестраховщика также лимитируется определенным пределом.

**Пример 2.4.2.** По условиям договора о перестраховании эксцедента убыточности перестраховщик обязан произвести страховую выплату цеденту в случае, если *выплаты страховщика по возмещению ущерба* превысят за год уровень в 100%. Лимит ответственности перестраховщика – 108%. За год страховщик собрал страховую премию в объеме 40 млн. долларов, а выплатил страховое возмещение в объеме 44 млн. долларов. Какую сумму выплатит перестраховщик цеденту?

**Решение.** Сначала определим уровень выплат по формуле (2.4.2):

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Уровень} \\ \text{выплат}\end{matrix}} = \frac{44\text{ млн. долларов}}{40\text{ млн. долларов}} \cdot 100\% = 110\%\,.$$

Полученное значение превышает лимит ответственности перестраховщика. Поэтому перестраховщик должен выплатить цеденту возмещение $Sb$, которое находится по формуле:

$$Sb = 40 \cdot (1{,}08 - 1) = 3{,}2\ (\text{млн.долларов})\,.$$

**Ответ:** $3{,}2$ млн. долларов.

# 3 Справочные сведения из теории вероятностей

## *3.1 Дискретное вероятностное пространство*

Рассмотрим произвольное конечное или счетное множество

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$$

и назовем элементы этого множества *элементарными исходами*.

Будем говорить, что *на множестве* $\Omega$ задана *вероятность* $P$, если каждому элементарному исходу $\omega_i$ поставлено в соответствие число $P(\omega_i)$, удовлетворяющее условию $0 \le P(\omega_i) \le 1$, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1.$$

Произвольные подмножества множества $\Omega$ назовем *событиями* (*случайными событиями*).

Вероятностью $P(A)$ события $A$ называют сумму вероятностей элементарных исходов, составляющих событие $A$.

*Множество всех событий* обозначим символом $F$.

Тройку объектов $(\Omega, F, P)$ называют *дискретным вероятностным пространством*.

На множестве $F$ случайных событий определены операции *суммы*, *произведения и перехода к противоположному событию*:

- Событие $A+B$ называют *суммой* событий $A$ и $B$, если происходит хотя бы одно из событий $A$ или $B$;
- Событие $A \cdot B$ называют *произведением* событий $A$ и $B$, если происходят оба события $A$ и $B$;
- Событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие $A$ не происходит, называют *противоположным* к событию $A$.

Важным понятием является понятие несовместности событий.

События $A$ и $B$ называют *несовместными*, если событие $A \cdot B$ не может произойти.

Рассмотрим случай, когда множество $\Omega$ является *конечным* и содержит $n$ элементарных исходов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Если предположить также, что все элементарные исходы *равновероятны*, то для каждого элементарного исхода $\omega_i$ будет выполнено соотношение

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим теперь произвольное событие $A$, состоящее из $m$ элементов, и назовем *вероятностью события* $A$ число

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (3.1.1.)$$

Вероятность (3.1.1.) заключена в пределах $0 \le P(A) \le 1$, и чем ближе она к $1$, тем больше оснований ожидать, что событие $A$ действительно произойдет.

Определение вероятности события по формуле (3.1.1.) называют *классическим* определением вероятности события, число $m$ называют *числом благоприятных исходов*, а число $n$ называют *числом всех исходов*.

Следующие формулы часто используются в задачах, связанных с подсчетом вероятностей:

- *Число перестановок* $n$ различных элементов

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

<u>*Замечание.*</u> $0!$ во всех формулах считается равным $1$;

- *Число размещений* $m$ различных элементов на $n$ местах $(m \le n)$

(число способов выбрать $m$ элементов из $n$ различных элементов, если порядок, в котором они выбраны, имеет значение)

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1);$$

- *Число сочетаний* из $n$ различных элементов по $m$ элементов $(m \le n)$ (число способов выбрать $m$ элементов из $n$ различных элементов, если порядок, в котором они выбраны, не имеет значения, а важно лишь, какие элементы выбраны)

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{n!\cdot(n-m)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}.$$

Теорема о вероятности суммы двух событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B)$$

Следствие 1. Для *несовместных* событий $A$ и $B$ выполнено соотношение

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Следствие 2. Для *противоположного* события $\overline{A}$ выполнено соотношение

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

Условная вероятность

*Условной вероятностью* $P(B/A)$ события $B$ при условии $A$ называют вероятность наступления события $B$, если известно, что событие $A$ *уже произошло*.

Теорема о вероятности произведения двух событий:

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B/A)$$

Независимость событий

События $A$ и $B$ называют *независимыми*, если $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$.

*Следствие*. Для *независимых* событий $A$ и $B$ выполнено соотношение

$$P(B/A) = P(B).$$

Формулы полной вероятности и Байеса

События $H_1, H_2, ..., H_n$, называемые *гипотезами*, образуют *полную группу событий*, если выполнены следующие условия:

- События $H_i$ и $H_j$ несовместны при любых $i \neq j$;
- $H_1 + H_2 + ... + H_n = \Omega$.

В этом случае для любого события $A$ выполнены два соотношения:

- $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$ — *формула полной вероятности*;
- $P(H_k/A) = \dfrac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{P(A)}$ — *формула Байеса.*

<u>Серия независимых испытаний Бернулли (схема Бернулли)</u>

Пусть проведена серия независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события $A$ равна $p$.

Тогда вероятность того, что в *серии из* $n$ *испытаний* событие $A$ *появится ровно* $k$ раз, выражается *формулой Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

При больших значениях $n$ расчеты по формуле Бернулли затруднительны, поэтому используются приближенные формулы (*нормальное приближение*):

- $P_n(k) \simeq \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$, $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ — *локальная теорема Муавра – Лапласа*;
- $P_n(k_1 \le k \le k_2) \simeq \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$, $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, i = 1,2$

— *интегральная теорема Муавра – Лапласа.*

<u>*Замечание.*</u> Существуют таблицы значений функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$. В главе 6 приводятся таблицы значений функции

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt.$$

Для вычисления значений функции $\Phi(x)$ используются следующие свойства:

- если $x \ge 0$, то $\Phi(x)=0{,}5+\Phi_0(x)$,
- если $x<0$, то $\Phi(x)=0{,}5-\Phi_0(x)$.

*Пуассоновское приближение* для схемы Бернулли

Пусть $n\to\infty$, $p\to 0$, так, что $np\to\lambda$ $(\lambda>0)$. Тогда для любого фиксированного числа $k$ выполнено соотношение

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

На практике, когда $n>100, np\le 10$ применяют *Пуассоновское* приближение, если же $n>100, np>20$, то применяют *нормальное* приближение.

## 3.2 Случайные величины и их числовые характеристики

*Случайной величиной* на *дискретном вероятностном пространстве* $(\Omega, F, P)$ называют любую числовую функцию, определенную на множестве $\Omega$.

Случайные величины принято обозначать греческими буквами $\xi,\eta,\zeta,\ldots$.

Поскольку $\Omega$ является счетным или конечным множеством, то и множество значений произвольной случайной величины будет счетным или конечным.

Закон распределения случайной величины

Случайные величины задают при помощи *закона распределения.*

*Законом распределения* случайной величины $\xi$ называют таблицу

$\xi:$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | … |

,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $\dots$ |

в верхней строке которой перечислены *значения*, которые принимает случайная величина, а в нижней – *вероятности*, с которыми она принимает эти значения.

Таким образом,

$$p_k = P\left(\xi = x_k\right), k = 1,2,3,\dots,$$

причем вероятности $p_1, p_2, \dots$ удовлетворяют соотношению

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1.$$

Числовые характеристики случайных величин

Самыми важными числовыми характеристиками случайной величины являются ее *математическое ожидание* и *дисперсия*.

*Математическим ожиданием* $M\xi$ случайной величины $\xi$ называют число

$$M\xi = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots .$$

Математическое ожидание имеет смысл среднего значения случайной величины.

*Дисперсией* $D\xi$ случайной величины $\xi$ называют число

$$D\xi = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 + \dots - (x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots)^2 .$$

Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины от ее математического ожидания.

*Средним квадратическим отклонением* $\sigma(\xi)$ случайной величины $\xi$ называют число

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} .$$

Независимость случайных величин

Случайные величины $\xi_1$ и $\xi_2$ называют *независимыми*, если для *любых чисел* $x$ и $y$ события $\{\xi_1 = x\}$ и $\{\xi_2 = y\}$ являются *независимыми* событиями.

Следствие. Если $\xi_1$ и $\xi_2$ – *независимые случайные величины*, то

$$P(\xi_1 = x, \xi_2 = y) = P(\xi_1 = x) \cdot P(\xi_2 = y).$$

Свойства математического ожидания и дисперсии:

- Если $c$ – произвольное число, а $\eta = c \cdot \xi$, то

$$M\eta = c \cdot M\xi,$$
$$D\eta = c^2 \cdot D\xi.$$

- Если $\xi = \xi_1 + \xi_2$, то $M\xi = M\xi_1 + M\xi_2$.

- Если $c$ – произвольное число, а $\eta = c + \xi$, то $D\eta = D\xi$.

- Если $\xi_1$ и $\xi_2$ – *независимые случайные величины*, а $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2$, то

$$M\xi = M\xi_1 \cdot M\xi_2.$$

- Если $\xi_1$ и $\xi_2$ – *независимые случайные величины*, а $\xi = \xi_1 + \xi_2$, то

$$D\xi = D\xi_1 + D\xi_2.$$

## 3.3 Основные виды распределений дискретных случайных величин

В данном параграфе описываются важные и распространенные в приложениях дискретные случайные величины с *биномиальным* законом распределения, *геометрическим* законом распределения и законом распределения *Пуассона*.

- *Биномиальный* закон распределения с параметром $p$ $(0 < p < 1)$ задается следующей таблицей, где использовано обозначение $q = 1 - p$:

| $\xi:$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $1$ | ... | $k$ | … | $n$ |
| | $q^n$ | $n \cdot p \cdot q^{n-1}$ | ... | $C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ | … | $p^n$ |

Характеристики: $M\xi = n\cdot p$, $D\xi = n\cdot p\cdot q$, $\sigma(\xi) = \sqrt{n\cdot p\cdot q}$.

- *Геометрический* закон распределения с параметром $p$ $(0 < p < 1)$ задается следующей таблицей, где, как и в предыдущем случае, $q = 1 - p$:

$\xi$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | ... | $k$ | $\ldots$ |
| $p$ | $p\cdot q$ | ... | $p\cdot q^{k-1}$ | $\ldots$ |

Характеристики: $M\xi = \frac{1}{p}$, $D\xi = \frac{q}{p^2}$, $\sigma(\xi) = \frac{\sqrt{q}}{p}$.

- Распределение Пуассона с параметром $\lambda$ $(\lambda > 0)$ задается следующей таблицей:

$\xi$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | ... | $k$ | $\ldots$ |
| $e^{-\lambda}$ | $\lambda\cdot e^{-\lambda}$ | ... | $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ | $\ldots$ |

.

Характеристики: $M\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$, $\sigma(\xi) = \sqrt{\lambda}$.

## 3.4 Общее определение вероятностного пространства

Пусть $\Omega$ – произвольное множество элементарных исходов.

Множество $F$ подмножеств множества $\Omega$ называют *сигма-алгеброй* случайных событий, если

- $\Omega \subset F$ ;
- $\varnothing \subset F$ ;
- Множество $F$ замкнуто относительно счетных сумм входящих в него подмножеств;
- Множество $F$ замкнуто относительно счетных произведений входящих в него подмножеств;

- Наряду с каждым событием $A \subset F$, во множество $F$ входит и $\overline{A}$.

Вероятностной мерой (вероятностью) $P$ на множестве $F$ называют числовую функцию, определенную на множестве $F$ и удовлетворяющую следующим условиям:

- $P(A) \ge 0 \quad \forall A \subset F$ ;
- $P(\Omega) = 1$ ;
- $\forall\, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \subset F$ и таких, что $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \ne j$, выполнено соотношение

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Тройку объектов $(\Omega, F, P)$ называют *вероятностным пространством.*

Случайной величиной $\xi$ называют произвольную числовую функцию $\xi = \xi(\omega)$, определенную на множестве $\Omega$ и измеримую относительно сигма-алгебры $F$.

Другими словами, $\xi = \xi(\omega)$ – случайная величина, если $\forall\, x \in R$ выполнено условие $\{\omega :\ \xi(\omega) \le x\} \in F$.

*Функцией распределения* случайной величины $\xi$ называют числовую функцию $F_\xi$, заданную соотношением

$$F_\xi(x) = P\{\ \xi(\omega) \le x\}.$$

Свойства функции распределения:

- $0 \le F_\xi(x) \le 1$ для всех значений $x$;
- Функция $F_\xi(x)$ не убывает для всех значений $x$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$;
- $P\{x_1 < \xi \le x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$ для любых значений $x_1 < x_2$;

- $\lim\limits_{y\to x+0} F_\xi(y) = F_\xi(x)$.

Случайную величину называют *непрерывной*, если ее *функция распределения непрерывна*.

Следствие. Случайная величина непрерывна тогда и только тогда, когда $P\{\xi = x\} = 0$ для всех значений $x$.

Важный класс непрерывных случайных величин – *абсолютно непрерывные* случайные величины.

Такие случайные величины имеют *плотность распределения.*

Случайную величину $\xi$ называют *абсолютно непрерывной*, если существует функция $p_\xi(x)$ такая, что

- $p_\xi(x) \geq 0$;
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\, dx = 1$;
- $\int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(y)\, dy = F_\xi(x)$ для всех значений $x$.

Функцию $p_\xi(x)$, удовлетворяющую перечисленным свойствам, называют *плотностью распределения* случайной величины $\xi$.

Следствие. Если $\xi$ – абсолютно непрерывная случайная величина, то

$$\int\limits_a^b p_\xi(x)\, dx = F_\xi(b) - F_\xi(a) = P\{a < \xi < b\}.$$

Следствие. Если плотность $p_\xi(x)$ непрерывна в точке $x$, то

$$\frac{d}{dx} F_\xi(x) = p_\xi(x).$$

*Математическим ожиданием* $M\xi$ случайной величины $\xi$ называют число

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x) dx.$$

Как и в дискретном случае, математическое ожидание имеет смысл среднего значения случайной величины.

*Дисперсией* $D\xi$ случайной величины $\xi$ называют число

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)\,dx\right)^2.$$

Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины от ее математического ожидания.

Математическое ожидание и дисперсия обладают теми же свойствами, как и в случае дискретных случайных величин.

*Средним квадратическим отклонением* $\sigma(\xi)$ случайной величины $\xi$ называют число

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}.$$

### *3.5 Основные виды распределений непрерывных случайных величин*

В данном параграфе описываются важные и распространенные в приложениях распределения непрерывных случайных величин: *равномерное* распределение, *показательное (экспоненциальное)* распределение и *нормальное* (*Гауссовское*) распределение.

- *Равномерное* распределение на отрезке $[a,b]$ задается плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a \le x \le b, \\ 0 & \text{при } b < x < +\infty. \end{cases}$$

Функция распределения

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\infty<x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 1 & \text{при } b<x<+\infty.\end{cases}$$

Характеристики: $M\xi=\dfrac{a+b}{2}$, $D\xi=\dfrac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma(\xi)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$. (4.5.1.)

- *Показательное* распределение с параметром $\lambda$ $(\lambda>0)$ задается плотностью распределения

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\infty<x<0,\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x} & \text{при } 0\le x<+\infty.\end{cases}$$

Функция распределения

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\infty<x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } 0\le x<+\infty.\end{cases}$$

Характеристики: $M\xi=\dfrac{1}{\lambda}$, $D\xi=\dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}$.

- *Нормальное* распределение с параметрами $a$, $\sigma$ $(\sigma>0)$ задается плотностью распределения

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения

$$F_\xi(x)=0{,}5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где через $\Phi(x)$ обозначена функция Лапласа (см. п. 4.1.)

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx.$$

Характеристики: $M\xi=a$, $D\xi=\sigma^2$, $\sigma(\xi)=\sigma$.

Квантили распределений

Предположим, что *строго возрастающая* функция $F_\xi(x)$ есть функция распределения некоторой *непрерывной* случайной величины $\xi$, а $\alpha$ – число, заключенное между $0$ и $1$.

*Квантилью (процентной точкой) уровня* $\alpha$ для функции распределения $F_\xi(x)$ называют число $u_\alpha$, являющееся решением уравнения

$$F_\xi(u_\alpha) = \alpha .$$

Другими словами, $u_\alpha = F_\xi^{-1}(\alpha)$, где $F_\xi^{-1}(x)$ – функция, обратная к функции распределения $F_\xi(x)$.

Из определения вытекает, что для любых значений $\alpha$ и $\beta$ $(0 < \alpha < \beta < 1)$ выполнено соотношение

$$P\left\{k_\alpha < \xi < k_\beta\right\} = \beta\text{-}\alpha$$

Правило трех сигм для нормального распределения:

$$P\left\{|\xi| > 3\sigma\right\} = 0{,}0027$$

# 4 Принцип эквивалентности рисков и его применения

## 4.1 Структура единовременной страховой премии

*Страховым тарифом* (*тарифной ставкой*, *брутто-ставкой*) называют страховую премию, уплачиваемую с *единицы страховой суммы*.

За *единицу страховой суммы* обычно принимают 100 рублей.

Таким образом,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Страховой}\\ \text{тариф (руб.)}\end{array}} = \frac{\boxed{\begin{array}{c}\text{Страховая}\\ \text{премия (руб.)}\end{array}}}{\boxed{\begin{array}{c}\text{Страховая}\\ \text{сумма (руб.)}\end{array}}} \cdot 100 \text{ (руб.)} . \qquad (4.1.1)$$

С другой стороны, если известен страховой тариф, то

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Страховая}\\ \text{премия (руб.)}\end{matrix}} = \frac{\boxed{\begin{matrix}\text{Страховой}\\ \text{тариф (руб.)}\end{matrix}}}{100 \text{ руб.}} \cdot \boxed{\begin{matrix}\text{Страховая}\\ \text{сумма (руб.)}\end{matrix}}. \qquad (4.1.2)$$

Кроме того, если, например, страховой тариф (обозначим его $T_\Delta$) равен $a$ рублям, то страховая премия составляет $a$ % от страховой суммы.

По этой причине страховой тариф часто устанавливают в *процентах от страховой суммы*.

В результате многовековой международной страховой практики установилась следующая *структура страховой премии:*

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Страховая}\\ \text{премия}\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{Нетто-}\\ \text{премия}\end{matrix}} + \boxed{\text{Нагрузка}}. \qquad (4.1.3)$$

*Нагрузка* предназначена для формирования прибыли страховщика и покрытия его расходов по ведению дел. Нагрузка обеспечивает поступление средств для оплаты труда, содержания зданий, приобретения оборудования, расходов на рекламу и т.п. Нагрузка обеспечивает также формирование запасных фондов по рисковым видам страхования и финансирование мероприятий по предупреждению несчастных случаев и уменьшению причиняемого ими ущерба. Нагрузка может использоваться для финансирования и других расходов страховщика.

Размер нагрузки определяется тарифной политикой страховщика, а также конкуренцией на страховом рынке.

*Нетто-премия* состоит их двух частей:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Нетто-}\\ \text{премия}\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{Рисковая}\\ \text{премия}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{Рисковая}\\ \text{надбавка}\end{matrix}}. \qquad (4.1.4)$$

*Рисковая премия* вычисляется с помощью соотношения

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Рисковая}\\ \text{премия}\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{Страховая}\\ \text{сумма}\end{matrix}} \cdot \boxed{\begin{matrix}\text{Частота наступления}\\ \text{страховых событий}\end{matrix}}, \qquad (4.1.5)$$

представляющего собой простейший вариант *принципа эквивалентности рисков страховщика и страхователя.*

Изложению этого принципа посвящен следующий параграф.

*Частотой наступления страховых событий* называют отношение количества страховых событий, произошедших в течение определенного промежутка времени, к общему количеству договоров страхования данного вида.

*Рисковая надбавка* оценивается с помощью методов теории вероятностей и математической статистики. Целью введения рисковой надбавки является повышение финансовой устойчивости страховых операций. Рисковая надбавка используется страховщиками для формирования фондов, обеспечивающих выплату страховых возмещений при возникновении ущербов, размер которых превышает среднестатистический уровень.

## 4.2 Простейший вариант принципа эквивалентности рисков

Предположим, что $n$ – число одинаковых страховых договоров, имеющихся в страховом портфеле страховщика, $Rp$ – рисковая премия, полученная по каждому из этих договоров, а $S$ – страховая сумма, указанная в каждом из этих договоров.

Предположим также, что рисковая и страховая премии совпадают, т.е. нагрузка и рисковая надбавка принимаются равными нулю.

На основе экспертных заключений и статистических данных, накопленных на протяжении ряда лет, страховщик, имея $n$ одинаковых страховых договоров, может определить (конечно же, приближенно) количество $m$ возможных страховых событий.

Тогда по этим договорам страхователи рискуют суммой денег, равной $Rp \cdot n$, а страховщик рискует суммой денег, равной $S \cdot m$.

Если принять, что *риски страховщика и страхователей эквивалентны*, т.е. *денежные суммы, которыми они рискуют, равны*, то возникает соотношение

$$Rp \cdot n = S \cdot m,$$

из которого вытекает соотношение

$$Rp = S \cdot \frac{m}{n}, \tag{4.2.1}$$

позволяющее вычислить *рисковую премию* $Rp$, если известна *страховая сумма* $S$ и *частота наступления страховых событий* $m/n$. Графическим изображением соотношения (4.2.1) является соотношение (4.1.5).

### 4.3 Усиленный вариант принципа эквивалентности рисков

В параграфе 4.2 был описан простейший вариант принципа эквивалентности рисков страховщика и страхователя.

Данный параграф посвящен изложению *усиленного варианта* этого принципа, основанного на использовании понятия *условного математического ожидания при условии, что произошло некоторое случайное событие*.

Не вдаваясь в достаточно сложные детали, имеющиеся в специальной литературе по теории вероятностей [6,14,17], продемонстрируем на примерах возможности применения понятия условного математического ожидания для *расчета рисковых премий*.

**Пример 4.3.1**. Автомобиль, стоимостью 20 000 у.е., страхуется по системе каско. Вероятность наступления страхового события 5%. Найти рисковую премию.

**Решение.** В данной задаче применять усиленный вариант принципа эквивалентности рисков страховщика и страхователя нет необходимости, и рисковую премию $Rp$ можно определить, воспользовавшись *простейшим вариантом* принципа эквивалентности рисков страховщика и страхователя:

$$Rp = 20000 \cdot 0,05 = 1000\,(\text{у.е.}).$$

**Ответ:** 1000 у.е.

**Задача 4.3.2**. Страховая стоимость объекта 20 млн. у.е. Вероятность повреждения объекта от бури в течение года – 3%, от наводнения – 2%, от пожара – 1%. Все три опасности независимы друг от друга.

Найти:

1. Рисковую премию, в случае, если объект страхуется от наступления хотя бы одной из опасностей.

2. Рисковую премию, в случае, если объект страхуется от одновременного наступления всех трех опасностей.

**Решение.** Обозначим опасности повреждения объекта от бури, наводнения и пожара символами $B_1$, $B_2$ и $B_3$ соответственно. Обозначим также наступление хотя бы одной из опасностей символом $A_1$, а наступление всех трех опасностей символом $A_2$.

Поскольку

$$\overline{A}_1 = \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3,$$

то, воспользовавшись равенствами

$$P(B_1) = 0{,}03,\ P(B_2) = 0{,}02,\ P(B_3) = 0{,}01,$$

получим

$$P\left(\overline{A}_1\right) = P\left(\overline{B}_1\right) \cdot P\left(\overline{B}_2\right) \cdot P\left(\overline{B}_3\right) = \left(1 - P(B_1)\right) \cdot \left(1 - P(B_1)\right) \cdot \left(14P(B_1)\right) =$$
$$= (1 - 0{,}03) \cdot (1 - 0{,}02) \cdot (1 - 0{,}01) = 0{,}941094.$$

Поэтому

$$P(A_1) = 1 - P\left(\overline{A}_1\right) = 1 - 0{,}941094 = 0{,}058906.$$

Таким образом, в случае, если объект страхуется от наступления опасности $A_1$, рисковая премия

$$Rp_1 = 20\,000\,000 \cdot 0{,}058906 = 1178\,120 \text{ (у.е.)}.$$

Из тех же соображений, поскольку

$$A_2 = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3,$$

то

$$P(A_2)=P(B_1\cdot B_2\cdot B_3)=P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3)= \\ =0{,}03\cdot 0{,}02\cdot 0{,}01=0{,}000006.$$

Следовательно, в случае, если объект страхуется от наступления опасности $A_2$, рисковая премия

$$Rp_2=20\,000\,000\cdot 0{,}000006=120\,(\text{у.е.}).$$

**Ответ:** В случае, если объект страхуется от наступления хотя бы одной из опасностей, рисковая премия равна $1178120\,(\text{у.е.})$. В случае, если объект страхуется от наступления всех трех опасностей, рисковая премия равна $120\,(\text{у.е.})$.

В отличие от предыдущих примеров в следующей задаче уже используется понятие *условного* математического ожидания.

**Задача 4.3.3**. Вероятность наступления страхового события 0,01. Размер ущерба, возникающего в случае, если страховое событие произошло, имеет следующее распределение

| | | |
|---|---|---|
| 9000 у.е. | 6000 у.е. | 3000 у.е. |
| $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{3}$ |

.

Найти рисковую премию.

**Решение.** Сначала найдем математическое ожидание $M$ ущерба, возникающего в случае, если страховое событие произошло:

$$M=9000\cdot\frac{1}{12}+6000\cdot\frac{1}{4}+3000\cdot\frac{2}{3}=4250.$$

Введем теперь в рассмотрение *случайную величину* $\xi$, распределенную по закону

$$\xi: \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 4250 \\ \hline 0{,}99 & 0{,}01 \\ \hline \end{array},$$

и найдем ее математическое ожидание $M\xi$.

Величина $M\xi$ является *условным математическим ожиданием* случайной величины $\xi$ *при условии, что страховое событие произошло*. В то же время это математическое ожидание и является искомой *рисковой премией* $Rp$:

$$M\xi = Rp = 0 \cdot 0{,}99 + 4250 \cdot 0{,}01 = 42{,}5.$$

**Ответ:** 42,5 у.е.

Сформулируем теперь результат, *обобщающий ситуацию*, рассмотренную в задаче 4.3.3.

Предположим, что вероятность события $A$ равна $p$, а $\xi$ – случайная величина, математическое ожидание которой равно $M\xi$. Тогда *условное математическое ожидание* $M\left[M\xi/\mathrm{A}\right]$ *случайной величины* $\xi$, *при условии, что событие* $A$ *произошло*, вычисляется по формуле

$$M\left[M\xi/\mathrm{A}\right] = p \cdot M\xi.$$

Если же случайная величина $\xi$ *представляет собой ущерб*, который наносится объекту страхования в результате наступления страхового события $A$, то рисковая премия $Rp$ также вычисляется по формуле

$$Rp = p \cdot M\xi. \qquad (4.3.3.)$$

Формула (4.3.3.) и представляет *собой усиленный вариант принципа эквивалентности рисков страховщика и страхователя.*

**Пример 4.3.4**. Вероятность наступления страхового события 0,01. Размер ущерба, возникающего в случае, если страховое событие произошло, *распределен равномерно* на отрезке $\left[0, 10000000\,(\text{у.е.})\right]$. Найти рисковую премию.

**Решение.** Найдем рисковую премию, воспользовавшись формулами (3.5.1.) и (4.3.3.):

$$Rp = p \cdot M\xi = 0{,}01 \cdot \frac{10000000\text{-}0}{2} = 50000\,(\text{у.е.}).$$

**Ответ:** 50000 у.е.

Усложним теперь пример 4.3.4., введя в условие предел ответственности страховщика.

**Задача 4.3.5.** Вероятность наступления страхового события 0,01. Размер ущерба, возникающего в случае, если страховое событие произошло, *распределен равномерно* на отрезке $\left[0, 10000000\,(\text{у.е.})\right]$. *Лимит ответственности страховщика* 8000000 у.е.. Найти рисковую премию.

**Решение.** В рассматриваемой нами ситуации максимальное значение ущерба больше, чем предел ответственности страховщика. По этой причине функция распределения ущерба $F_\xi(x)$, в случае, если страховое событие произошло, принимает вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ \dfrac{x}{10000000} & \text{при } 0 \le x \le 8000000, \\ 1 & \text{при } 8000000 < x < +\infty \end{cases}$$

и, в отличие от стандартной функции равномерного распределения, приведенной в § 3.5, имеет в точке $x_0 = 8000000$ разрыв (скачок). Величина скачка

$$\Delta = 1 - \frac{8000000}{10000000} = 0{,}2\,.$$

Теперь найдем математическое ожидание ущерба в случае, если страховое событие произошло.

Не вдаваясь в достаточно сложные детали, связанные со свойствами интегралов Стилтьеса $[17]$, заметим, что в нашем случае, когда функция распределения имеет единственный разрыв (скачок), формула для вычисления математического ожидания

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx$$

изменяется и принимает вид:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx + x_0 \cdot \Delta .$$

Таким образом,

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx + x_0 \cdot \Delta = \int_{0}^{8000000} x \cdot \frac{1}{10000000}dx + 8000000 \cdot 0,2 =$$

$$= \left.\frac{x^2}{2 \cdot 10000000}\right|_0^{8000000} + 1600000 = 3200000 + 1600000 = 4800000.$$

Отсюда по формуле (4.3.3.) получаем

$$Rp = p \cdot M\xi = 0,01 \cdot 4800000 = 48000 \,(\text{у.е.}).$$

**Ответ:** 48000 у.е.

**Задача 4.1.6.** Вероятность наступления страхового события 0,005. Размер ущерба, возникающего в случае, если страховое событие произошло, имеет *показательное* распределение с параметром $\lambda = 0,0002$. Лимит ответственности страховщика 10000 у.е.. Найти рисковую премию.

**Решение.** Функция распределения ущерба $F_\xi(x)$, в случае, если страховое событие произошло, принимает вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } 0 \le x < 10000, \\ 1 & \text{при } 10000 \le x < +\infty \end{cases}$$

и, в отличие от стандартной функции показательного распределения, приведенной в § 3.5, имеет в точке $x_0 = 10000$ единственный разрыв (скачок). Величина скачка

$$\Delta = 1 - \left(1 - e^{-\lambda \cdot x_0}\right) = e^{-\lambda \cdot x_0} = e^{-0{,}0002 \cdot 10000} = e^{-2}.$$

Теперь найдем математическое ожидание ущерба в случае, если страховое событие произошло:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)\,dx + x_0 \cdot \Delta = \int_0^{x_0} x\lambda e^{-\lambda x} dx + x_0 \cdot \Delta =$$

$$= -\int_0^{x_0} x \cdot d\left(e^{-\lambda x}\right) + x_0 \cdot \Delta = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{x_0} + \int_0^{x_0} e^{-\lambda x} dx + x_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x_0} =$$

$$= -x_0 e^{-\lambda x_0} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{x_0} + x_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x_0} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x_0} + \frac{1}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x_0}\right) = 5000 \cdot \left(1 - e^{-2}\right) \simeq 4323.$$

Отсюда по формуле (4.3.3.) найдем рисковую премию:

$$Rp = p \cdot M\xi = 0{,}005 \cdot 4323 = 21{,}615\,(\text{у.е.}).$$

**Ответ:** $21{,}615$(у.е.)

### *4.4 Страхование жизни*

В странах с развитой системой страхования количество договоров страхования жизни достигает 70% среди всех страховых договоров. В нашей стране, к сожалению, количество таких договоров пока составляет лишь 6%.

В отличие от других видов страхования договоры страхования жизни представляют собой договоры о проведении специальных финансовых операций, и, как правило, предусматривают обязательства страховщика по выплате страховой суммы по окончании срока действия договора, или связаны с накоплением страховой суммы в течение срока действия договора.

Планирование и проведение финансовых операций по страхованию жизни основано на выяснении закономерностей, связанных со временем наступления смерти среди различных групп населения. На эти закономерности влияют национальные, политические, природные, климатические, экологические, социальные, экономические, профессиональные и другие факторы.

Наиболее сильная корреляция наблюдается между временем наступления смерти и возрастом человека.

Выяснение характера этой зависимости и является базисом для научно обоснованной организации долгосрочного страхования жизни.

Источником информации, необходимой для проведения расчетов по страхованию жизни, являются *таблицы смертности*. Они составляются на основании статистических данных о возрастном составе и смертности населения.

Последняя строка таблицы смертности соответствует *предельному возрасту* $w$. Предполагается, что количество людей, возраст которых (полное число лет) превышает $w$, равно нулю.

Статистические исследования показали, что смертность среди мужчин выше, чем смертность среди женщин, вследствие чего у женщин более высокая продолжительность жизни.

Тем не менее, во многих развитых странах используется единая таблица смертности для мужчин и женщин и единая система тарифных ставок.

Российские страховые компании устанавливают различные тарифные ставки для мужчин и женщин.

В страховании жизни используются следующие термины, обозначения и формулы, которые для удобства сведены в Таблицу 4.4.1.

Т а б л и ц а 4.4.1. Термины, обозначения и формулы

| **№** | **Символ** | **Термин** | **Формула** |
|---|---|---|---|
| 1 | $x$ | Возраст человека (число полных лет) | |
| 2 | $l_0$ | Корень таблицы смертности (число родившихся людей, обычно 100000, но может быть и другим) | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | $l_x$ | Число людей из числа $l_0$, доживших до возраста $x$ | |
| 4 | $d_x$ | Число людей, умерших в возрасте $x$ | $d_x = l_x - l_{x+1}$ |
| 5 | $q_x$ | Вероятность для человека в возрасте $x$ умереть в течение года | $q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$ |
| 6 | $p_x$ | Вероятность для человека в возрасте $x$ дожить до возраста $x+1$, т.е. прожить еще 1 год | $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ |
| 7 | ${}_n p_x$ | Вероятность для человека в возрасте $x$ дожить до возраста $x+n$, т.е. прожить еще $n$ лет | ${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ |
| 8 | ${}_n q_x$ | Вероятность для человека в возрасте $x$ умереть в течение следующих $n$ лет | ${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$ |

Покажем сначала, как выводятся формулы из последнего столбца Таблицы 4.4.1.

Для удобства ссылок на формулы, будем считать, что номером формулы является номер соответствующей строки Таблицы 4.4.1.

Формула (4) легко вытекает из определения входящих в нее переменных.

Вывод формул (5) – (8) осуществляется на основе следующих соотношений соответственно:

- $q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$ (5),
- $p_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ (6),
- ${}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{l_{x+n-1}}{l_{x+n-2}} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ (7),
- ${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$ (8).

**Пример 4.4.1.** Найти вероятность для мужчины 40 лет умереть в течение года.

**Решение.** Воспользовавшись Таблицей смертности 6.6, находим:

$$l_{40} = 83344, l_{41} = 82199 .$$

Тогда из формулы (5) получаем:

$$q_{40} = \frac{l_{40} - l_{41}}{l_{40}} = \frac{83344 - 82199}{83344} \simeq 0,0137 .$$

**Ответ:** $0,0137$ .

**Пример 4.4.2.** Найти вероятность для мужчины 40 лет дожить до 60 лет.

**Решение.** По таблице смертности (мужчины) находим:

$$l_{40} = 83344, l_{60} = 50246 .$$

Тогда из формулы (6) получаем:

$$_{20}p_{40} = \frac{l_{60}}{l_{40}} = \frac{50246}{83344} = 0,6029 .$$

**Ответ:** $0,6029$ .

В страховании жизни большое значение имеет демографический фактор, который называют *средняя продолжительность оставшейся жизни*.

В практических расчетах обычно используют приближенное значение этой величины, обозначаемое $e_x$.

Рассмотрим схему расчета этого показателя.

Полное число лет $T_x$, которое проживут лица в возрасте $x$ из группы численностью $l_x$, подсчитывается следующим образом:

$$T_x = d_{x+1} + 2\cdot d_{x+2} + 3\cdot d_{x+3} + \ldots =$$
$$= l_{x+1} - l_{x+2} + 2\cdot\left(l_{x+2} - l_{x+3}\right) + 3\cdot\left(l_{x+3} - l_{x+4}\right) + \ldots =$$
$$= l_{x+1} - l_{x+2} + 2\cdot l_{x+2} - 2\cdot l_{x+3} + 3\cdot l_{x+3} - 3\cdot l_{x+4} + \ldots =$$
$$= l_{x+1} + \left(-l_{x+2} + 2\cdot l_{x+2}\right) + \left(-2\cdot l_{x+3} + 3\cdot l_{x+3}\right) + \ldots =$$
$$= l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots = \sum_{k=1}^{w-x} l_{x+k}.$$

Разделив это число на численность группы, получим приближенное значение средней продолжительности оставшейся жизни для члена группы в возрасте $x$:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{1}{l_x}\cdot\sum_{k=1}^{w-x} l_{x+k}$$

Эту величину часто называют *округленным значением средней продолжительности оставшейся жизни*, имея ввиду, что в расчетах использовалось округленное до целого числа количество лет предстоящей жизни для группы численностью $l_x$.

**Пример 4.4.3.** Найти округленную среднюю продолжительность оставшейся жизни для мужчины в возрасте 65 лет.

**Решение.** Подставив данные из таблицы смертности в формулу для определения $e_x$, и, произведя простой подсчет, получим

$$e_{65} = \frac{1}{l_{65}}\cdot\sum_{k=1}^{35} l_{65+k} = 12,24\ (\text{года}).$$

**Ответ:** $12,24$ года.

В страховании применяется много различных договоров о *страховании на дожитие*.

Рассмотрим один из договоров о страховании на дожитие, в котором используется *финансовая рента*.

*Финансовой рентой* называют последовательность платежей, осуществляемых через *одинаковые* промежутки времени.

*Постоянной* финансовой рентой называют финансовую ренту с *одинаковыми* платежами, в противном случае ее называют *переменной*.

Финансовую ренту называют *конечной*, если *количество* платежей *ограничено*, в противном случае ее называют *бесконечной*.

За пользование рентными суммами, как правило, начисляются процентные деньги.

Рассмотрим сначала случай начисления *простых* процентов.

**Задача 4.4.4.** Мужчина (страхователь) в возрасте 40 лет, родившийся 31 декабря, заключил со страховщиком 31 декабря 2006 года *страховой договор на дожитие* сроком на 10 полных лет со страховой суммой 300000 рублей. По условиям договора страховая премия вносится в рассрочку при помощи одинаковых страховых взносов, осуществляемых 1-го января каждого года в период действия договора. За пользование рентными суммами страховщик начисляет на них процентные деньги по схеме *простых* процентов с годовой процентной ставкой 5%. В случае смерти страхователя в период действия договора страховая сумма не выплачивается, а выгодоприобретателю выплачивается сумма накопленных к этому моменту страховых платежей (без начисленных процентных денег). В случае дожития страхователя до указанного в договоре срока выгодоприобретателю выплачивается страховая сумма. Найти величину страхового взноса.

**Решение.** Обозначим через $V$ размер страхового взноса. В случае «дожития» на первый взнос процентные деньги начисляются в течение 10 лет, а за каждый год наращивается 5%. Поэтому к 31 декабря 2016 года первый взнос превращается в сумму

$$V_1 = V \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 10) = 1{,}5 \cdot V.$$

На второй взнос процентные деньги начисляются в течение 9 лет, и к 31 декабря 2013 года он превращается в сумму

$$V_2 = V \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 9) = 1{,}45 \cdot V.$$

Третий взнос превращается в сумму

$$V_3 = V \cdot (1 + 0,05 \cdot 8) = 1,4 \cdot V$$

и т.д.

Таким образом, возникает убывающая *арифметическая* прогрессия из 10 членов

$$V_1, V_2, ..., V_{10},$$

с первым членом $1,5 \cdot V$ и последним членом $1,05 \cdot V$.

Сумма $W$ этой арифметической прогрессии

$$W = \frac{1,5 \cdot V + 1,05 \cdot V}{2} \cdot 10 = 12,75 \cdot V .$$

Рассмотрим теперь группу страхователей численностью $l_{40}$ в возрасте 40 лет, заключивших со страховщиком тот же договор страхования на дожитие сроком на 10 лет. Тогда суммарная выплата $Sb$, которую должен совершить страховщик по окончании срока договора, равняется числу доживших до возраста 50 лет страхователей, умноженному на страховую сумму:

$$Sb = 300000 \cdot l_{50} .$$

В расчете на каждого страхователя, заключившего договор, приходится сумма

$$P = \frac{Sb}{l_{40}} = 300000 \cdot \frac{l_{50}}{l_{40}}.$$

По таблице смертности 6.6 находим:

$$l_{40} = 83344, \; l_{50} = 70354.$$

Поэтому

$$P = 300000 \cdot \frac{l_{50}}{l_{40}} = \frac{300000 \cdot 70354}{83344} = 253241,99.$$

В соответствии с принципом эквивалентности рисков страховщика и страхователя выполнено соотношение

$$P = W ,$$

с помощью которого можно найти величину страхового взноса:

$$V = \frac{W}{12,75} = \frac{253241,99}{12,75} = 19862,12 .$$

**Ответ:** 19862,12 рублей.

Перейдем теперь к случаю начисления *сложных* процентов, чуть-чуть изменив условие и решение задачи 4.4.4.

**Задача 4.4.5.** Мужчина (страхователь) в возрасте 40 лет, родившийся 31 декабря, заключил со страховщиком 31 декабря 2006 года *страховой договор на дожитие* сроком на 10 полных лет со страховой суммой 300000 рублей. По условиям договора страховая премия вносится в рассрочку при помощи одинаковых страховых взносов, осуществляемых 1-го января каждого года в период действия договора. За пользование рентными суммами страховщик начисляет на них процентные деньги по схеме *сложных* процентов с годовой процентной ставкой 5%. В случае смерти страхователя в период действия договора страховая сумма не выплачивается, а выгодоприобретателю выплачивается сумма накопленных к этому моменту страховых платежей (без начисленных процентных денег). В случае дожития страхователя до указанного в договоре срока выгодоприобретателю выплачивается страховая сумма. Найти величину страхового взноса.

**Решение.** Обозначим через $V$ размер страхового взноса. В случае «дожития» на первый взнос процентные деньги начисляются в течение 10 лет, а за каждый год наращивается 5%. Поэтому к 31 декабря 2016 года первый взнос превращается в сумму

$$V_1 = V \cdot (1 + 0,05)^{10} = 1,63 \cdot V .$$

На второй взнос процентные деньги начисляются в течение 9 лет, и к 31 декабря 2013 года он превращается в сумму

$$V_2 = V\cdot(1+0,05)^9 = 1,55\cdot V.$$

Третий взнос превращается в сумму

$$V_3 = V\cdot(1+0,05)^8 = 1,48\cdot V$$

и т.д. Таким образом, возникает убывающая *геометрическая* прогрессия из 10 членов

$$V_1, V_2, ..., V_{10}$$

с первым членом $1,63\cdot V$ и знаменателем $q = \frac{1}{1,05} = 0,95$.

Сумма $W$ этой геометрической прогрессии

$$W = 1,63\cdot V\cdot\frac{q^{10}-1}{q-1} = 1,63\cdot V\cdot\frac{1-0,95^{10}}{1-0,95} = 13,04\cdot V.$$

Рассмотрим теперь группу страхователей численностью $l_{40}$ в возрасте 40 лет, заключивших со страховщиком тот же договор страхования на дожитие сроком на 10 лет. Тогда суммарная выплата $Sb$, которую должен совершить страховщик по окончании срока договора, равняется числу доживших до возраста 50 лет страхователей, умноженному на страховую сумму:

$$Sb = 300000\cdot l_{50}.$$

В расчете на каждого страхователя, заключившего договор, приходится сумма

$$P = \frac{Sb}{l_{40}} = 300000\cdot\frac{l_{50}}{l_{40}}.$$

По таблице смертности находим:

$$l_{40} = 83344,\ l_{50} = 70354.$$

Поэтому

$$P = 300000 \cdot \frac{l_{50}}{l_{40}} = \frac{300000 \cdot 70354}{83344} = 253241,99.$$

В соответствии с принципом эквивалентности рисков страховщика и страхователя выполнено соотношение

$$P = Sb,$$

с помощью которого можно найти величину страхового взноса:

$$V = \frac{Sb}{13,04} = \frac{253241,99}{13,04} = 19420,4.$$

**Ответ:** $19420,4$ рублей.

# 5 Расчет страховых тарифов

## *5.1 Методики расчета, рекомендованные Росстрахнадзором*

Распоряжением Федеральной службы РФ по надзору за страховой деятельностью № 02-03-36 от 8 июля 1993 г. рекомендовано использовать *две* изложенные далее *методики расчета тарифных ставок (страховых тарифов)* по рисковым видам страхования, отличным от страхования жизни.

В соответствии с (4.1.3) и (4.1.4)

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Тарифная}\\ \text{ставка}\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{Нетто-}\\ \text{ставка}\end{matrix}} + \boxed{\text{Нагрузка}}, \tag{5.1.1}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Нетто-}\\ \text{ставка}\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{Основная часть}\\ \text{(рисковая премия)}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{Рисковая}\\ \text{надбавка}\end{matrix}}. \tag{5.1.2}$$

### 5.1.1 Первая методика

Следуя обозначениям, использованным в Распоряжении № 02-03-36, введем для нетто-ставки, ее основной части и рисковой надбавки обозначения $T\text{н}$, $T\text{о}$ и $T\text{р}$ соответственно.

Тогда соотношение (5.1.2) примет вид:

$$T\text{н} = T\text{о} + T\text{р}. \tag{5.1.3}$$

Предположим, что известно количество $n$ страховых договоров, заключенных в течение некоторого периода времени в прошлом.

Пронумеруем эти договоры индексами $i = 1,\dots,n$ так, чтобы страховые события произошли в договорах с индексами $i = 1,\dots,m$ $(m \le n)$, а в договорах с индексами $i = m+1,\dots,n$ – нет.

Обозначив *страховую сумму*, установленную в $i$-ом договоре $(i = 1,\dots,n)$ символом $S_i$, а *страховое возмещение*, выплаченное в результате $k$-го страхового случая $(k = 1,\dots,m)$, – символом $Sb_k$, введем следующие величины:

$$q = \frac{m}{n}, \tag{5.1.4}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i, \tag{5.1.5}$$

$$\overline{S} = \frac{1}{n} \cdot S = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} S_i, \tag{5.1.6}$$

$$Sb = \sum_{k=1}^{m} Sb_k, \tag{5.1.7}$$

$$\overline{Sb} = \frac{1}{m} \cdot Sb = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} Sb_k. \tag{5.1.8}$$

Величины $q$, $\overline{S}$, $\overline{Sb}$ рекомендуется использовать в качестве оценок вероятности наступления страхового события, средней страховой суммы и средней страховой выплаты соответственно.

Расчет основной части $To$ базируется на следующем принципе:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Сумма}\\ \text{рисковых премий}\\ \text{по всем договорам}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{Сумма}\\ \text{страховых выплат}\end{array}}. \tag{5.1.9}$$

В обозначениях (5.1.4) – (5.1.8) соотношение (5.1.9) имеет вид

$$\frac{To}{100} \cdot S = Sb.$$

Следовательно,

$$To = \frac{Sb}{S} \cdot 100, \tag{5.1.10}$$

а также,

$$To = \frac{Sb}{S} \cdot 100 = \frac{\sum_{k=1}^{m} Sb_k}{\sum_{i=1}^{n} S_i} \cdot 100 = \frac{m \cdot \overline{Sb}}{n \cdot \overline{S}} \cdot 100 = q \cdot \frac{\overline{Sb}}{\overline{S}} \cdot 100 .$$

Таким образом, мы получили оценку основной части $To$ нетто-ставки $T\text{н}$ в виде

$$To = q \cdot \frac{\overline{Sb}}{\overline{S}} \cdot 100, \tag{5.1.11}$$

причем Росстрахнадзор рекомендует в оценке (5.1.11) отношение средней страховой выплаты к средней страховой сумме

$$\frac{\overline{Sb}}{\overline{S}}$$

*принимать не ниже*:

- 0,3 – при страховании от несчастных случаев и болезней, в медицинском страховании;
- 0,4 – при страховании средств наземного транспорта;
- 0,5 – при страховании грузов и имущества, кроме средств транспорта;
- 0,6 – при страховании средств воздушного и водного транспорта;
- 0,7 – при страховании ответственности владельцев автотранспортных средств и других видов ответственности, и страховании финансовых рисков.

После того, как получена оценка основной части $To$ нетто-ставки $T\text{н}$, необходимо произвести оценку рисковой надбавки $T\text{р}$.

С этой целью сначала нужно установить уровень требуемой гарантии (вероятности) безопасности $\gamma$, достаточный для того, чтобы собранных страховых премий хватило на страховые выплаты, а затем воспользоваться *одним из следующих двух вариантов*.

**1.** Расчет рисковой надбавки в случае рисков одного вида.

При этом возникают две возможности.

**1.1.** Существует информация, позволяющая вычислить среднее квадратическое отклонение страховых выплат $Rb$ по формуле:

$$Rb = \sqrt{\frac{1}{m-1} \cdot \sum_{k=1}^{m} Sb_k^{\,2} - \frac{m}{m-1} \cdot \overline{Sb}^2}\,. \tag{5.1.12}$$

Тогда

$$Tp = To \cdot \alpha(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{1}{nq}\left[1 - q + \left(\frac{Rb}{\overline{Sb}}\right)^2\right]}, \tag{5.1.13}$$

где $\alpha(\gamma)$ – коэффициент, зависящий от гарантии безопасности $\gamma$. Его значение может быть взято из Таблицы 6.4.

**1.2.** Нет информации, позволяющей вычислить значение $Rb$. Тогда

$$Tp = 1{,}2 \cdot To \cdot \alpha(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{1-q}{nq}}. \tag{5.1.14}$$

**2.** Расчет рисковой надбавки для страхового портфеля, содержащего риски нескольких видов $j = 1,...,m$.

В этом случае рисковая надбавка рассчитывается по формуле

$$Tp = To \cdot \alpha(\gamma) \cdot \mu, \tag{5.1.15}$$

причем возникают две возможности для подсчета коэффициента $\mu$:

**2.1.** Предположим, что для $j$-го риска известны количество страховых договоров $n_j$, вероятность наступления страхового события $q_j$, среднее страховое возмещение $\overline{Sb}_j$ и среднее квадратическое отклонение страховых возмещений $Rb_j$. Тогда коэффициент $\mu$ может быть рассчитан по формуле:

$$\mu = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[\overline{Sb}_j^2 \cdot n_j \cdot q_j \cdot (1 - q_j) + Rb_j^2 \cdot n_j \cdot q_j\right]}}{\sum_{j=1}^{m} \overline{Sb}_j \cdot n_j \cdot q_j}. \tag{5.1.16}$$

При неизвестной величине $Rb_i$ для риска $i$-го вида соответствующее этому риску слагаемое в числителе формулы (5.1.16)

$$\overline{Sb}_i^2 \cdot n_i \cdot q_i \cdot (1 - q_i) + Rb_i^2 \cdot n_i \cdot q_i$$

допускается заменять величиной

$$1,44 \cdot \overline{Sb}_i^2 \cdot n_i \cdot q_i \cdot (1-q_i). \qquad (5.1.17)$$

**2.2.** В случае, когда производится страхование от нескольких рисков, однако отсутствует достоверная информация о средних разбросах возмещений по каждому из рисков (не известны значения $Rb_j$), для подсчета коэффициента $\mu$ может быть использована формула:

$$\mu = 1,2 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \overline{Sb}_j^2 \cdot n_j \cdot q_j \cdot (1-q_j)}}{\sum_{j=1}^{m} \overline{Sb}_j \cdot n_j \cdot q_j}. \qquad (5.1.18)$$

*Замечание 1.* Если о величинах $q$, $\overline{S}$ и $\overline{Sb}$ нет достоверной информации, например, когда они оцениваются не по формулам (5.1.4) – (5.1.8), а из других источников, то рекомендуется принимать значение $\alpha(\gamma)=3$.

*Замечание 2.* Если доля нагрузки (см. соотношение (5.1.1)) в тарифной ставке $T_\Delta$ составляет $f\%$, то тарифная ставка рассчитывается по формуле:

$$T_\Delta = \frac{T\text{н}}{100\text{-f}} \cdot 100. \qquad (5.1.19)$$

**Задача 5.1.1.** Страховая компания планирует заключить 40000 договоров страхования имущества. Вероятность наступления страхового случая 0,02. Средняя страховая сумма 1000000 рублей. Среднее страховое возмещение при наступлении страхового события 800000 рублей. Данных о разбросе возможных страховых возмещений нет. Возможные страховые возмещения не должны превысить собранных страховых премий с вероятностью 0,95. Доля нагрузки в структуре страхового тарифа 25%. Рассчитать страховой тариф.

**Решение.** По условию задачи

$$n = 40000, q = 0,02, \overline{S} = 1000000, \overline{Sb} = 800000, \gamma = 0,95, f = 25\%.$$

Вычислим основную часть $To$ нетто-ставки по формуле (5.1.11):

$$To = q \cdot \frac{\overline{Sb}}{\overline{S}} \cdot 100 = 0,02 \cdot \frac{800000}{1000000} \cdot 100 = 1,6.$$

С помощью Таблицы 6.4, находим, что $\alpha(\gamma = 0,95) = 1,645$. Вычислим рисковую надбавку $Tp$, воспользовавшись формулой (5.1.14):

$$Tp = 1,2 \cdot To \cdot \alpha(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{1-q}{nq}} = 1,2 \cdot 1,6 \cdot 1,645 \cdot \sqrt{\frac{1-0,02}{40000 \cdot 0,02}} = 0,110544.$$

Вычислим нетто-ставку по формуле (5.1.3):

$$Tн = To + Tp = 1,6 + 0,110544 = 1,71 (\text{руб.}).$$

Вычислим тарифную ставку по формуле (5.1.19):

$$T_{\Delta} = \frac{Tн}{100\text{-f}} \cdot 100 = \frac{1,71}{100\text{-}25} \cdot 100 = 2,28 (\text{руб.}).$$

**Ответ:** 2,28 рублей.

**Задача 5.1.2.** Страховая компания планирует заключить 9000 договоров страхования граждан от несчастных случаев. Вероятность наступления страхового случая 0,03. Средняя страховая сумма 18000 рублей. Среднее страховое возмещение при наступлении страхового события 7200 рублей. Средний разброс возможных страховых возмещений 2000 рублей. Возможные страховые возмещения не должны превысить собранных страховых премий с вероятностью 0,95. Доля нагрузки в структуре страхового тарифа 25%. Рассчитать страховой тариф.

**Решение.** По условию задачи

$$n = 9000,\ q = 0,03,\ \overline{S} = 18000,\ \overline{Sb} = 7200,\ Rb = 2000,\ \gamma = 0,95,\ f = 25\%.$$

Вычислим основную часть $To$ нетто-ставки по формуле (5.1.11):

$$To = q \cdot \frac{\overline{Sb}}{\overline{S}} \cdot 100 = 0,03 \cdot \frac{7200}{18000} \cdot 100 = 1,2.$$

Заметим, что, как и в предыдущей задаче, $\alpha(\gamma = 0{,}95) = 1{,}645$.

Вычислим рисковую надбавку $T\text{р}$, воспользовавшись формулой (5.1.13):

$$T\text{р} = T\text{о} \cdot \alpha(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{1}{nq}\left[1 - q + \left(\frac{\overline{Rb}}{\overline{Sb}}\right)^2\right]} =$$

$$= 1{,}2 \cdot 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{1}{9000 \cdot 0{,}03}\left[1 - 0{,}03 + \left(\frac{2000}{7200}\right)^2\right]} = 0{,}123$$

Вычислим нетто-ставку по формуле (5.1.3):

$$T\text{н} = T\text{о} + T\text{р} = 1{,}2 + 0{,}123 = 1{,}323\,(\text{руб.}).$$

Вычислим тарифную ставку по формуле (5.1.19):

$$T_{\Delta} = \frac{T\text{н}}{100\text{-f}} \cdot 100 = \frac{1{,}323}{100\text{-}25} \cdot 100 = 1{,}76\,(\text{руб.}).$$

**Ответ:** 1,76 рублей.

**Задача 5.1.3.** Страховая компания проводит оба вида страхования, описанные в задачах 5.1.1 и 5.1.2. Рассчитать страховые тарифы.

**Решение.** Обозначим числовые данные, относящиеся к имущественному страхованию, при помощи нижнего индекса 1, а к страхованию от несчастных случаев – при помощи нижнего индекса 2. Тогда по условиям задач 5.1.1 и 5.1.2

$$n_1 = 40000,\ q_1 = 0{,}02,\ \overline{S}_1 = 1000000,\ \overline{Sb}_1 = 800000,$$

$$n_2 = 9000,\ q_2 = 0{,}03,\ \overline{S}_2 = 18000,\ \overline{Sb}_2 = 7200,\ Rb_2 = 2000,$$

$$\gamma = 0{,}95,\ f = 25\%.$$

Следовательно,

$$m_1 = n_1 \cdot q_1 = 40000 \cdot 0{,}02 = 800,$$

$$m_2 = n_2 \cdot q_2 = 9000 \cdot 0{,}03 = 270.$$

Учитывая, что средний разброс страховых возмещений по первому риску неизвестен, а по второму – известен, вычислим коэффициент $\mu$ воспользовавшись формулами (5.1.16) и (5.1.17):

$$\mu = \frac{\sqrt{1,44\cdot \overline{Sb}_1^2 \cdot n_1 \cdot q_1 \cdot (1-q_1) + \overline{Sb}_2^2 \cdot n_2 \cdot q_2 \cdot (1-q_2) + Rb_2^2 \cdot n_2 \cdot q_2}}{\overline{Sb}_1 \cdot n_1 \cdot q_1 + \overline{Sb}_2 \cdot n_2 \cdot q_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1,44\cdot \overline{Sb}_1^2 \cdot m_1 \cdot (1-q_1) + \overline{Sb}_2^2 \cdot m_2 \cdot (1-q_2) + Rb_2^2 \cdot m_2}}{\overline{Sb}_1 \cdot m_1 + \overline{Sb}_2 \cdot m_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1,44\cdot \overline{Sb}_1^2 \cdot 800 \cdot 0,98 + \overline{Sb}_2^2 \cdot 270 \cdot 0,97 + Rb_2^2 \cdot 270}}{800 \cdot 800000 + 270 \cdot 7200} =$$

$$= \frac{\sqrt{722534400 + 13576,896 + 108}}{641944} = 0,0419.$$

В соответствии с формулой (5.1.15) рисковая надбавка для любого вида страхования, входящего в страховой портфель, выражается по формуле

$$T\text{р} = T\text{о} \cdot \alpha(\gamma) \cdot \mu = T\text{о} \cdot 1,645 \cdot 0,0419 = 0,0689 \cdot T\text{о}.$$

Поэтому для страхования имущества

$$T\text{н}_1 = T\text{о} + T\text{р} = T\text{о} + 0,0689 \cdot T\text{о} = 1,0689 \cdot T\text{о} = 1,0689 \cdot 1,6 = 1,71\,(\text{руб.}),$$

$$T_{\Delta 1} = \frac{T\text{н}_1}{100\text{-f}} \cdot 100 = \frac{1,71}{100\text{-}25} \cdot 100 = 2,28\,(\text{руб.})$$

Для страхования от несчастных случаев

$$T\text{н}_2 = T\text{о} + T\text{р} = T\text{о} + 0,0689 \cdot T\text{о} = 1,0689 \cdot T\text{о} = 1,0689 \cdot 1,2 = 1,28\,(\text{руб.}),$$

$$T_{\Delta 2} = \frac{T\text{н}_2}{100\text{-f}} \cdot 100 = \frac{1,28}{100\text{-}25} \cdot 100 = 1,71\,(\text{руб.}).$$

**Ответ:** 2,28 рублей для страхования имущества, 1,71 рублей для страхования от несчастных случаев.

### 5.1.2 Вторая методика

В данной методике страховые тарифы рассчитываются с помощью *прогнозирования уровня убыточности страховой суммы на следующий год*.

*Убыточностью* $Y$ *страховой суммы* называют *отношение* страхового возмещения к страховой сумме:

$$Y = \frac{Sb}{S}, \tag{5.1.20}$$

где, как и в предыдущем параграфе, символами $S$ и $Sb$ обозначены *страховая сумма и страховое возмещение* соответственно.

Прогнозирование осуществляется на основе построения *уравнения прямой линии регрессии* (выделение *линейного тренда*) в предположении о том, что зависимость убыточности от времени близка к линейной.

В соответствии с (5.1.10) основная часть $T\text{о}$ нетто-ставки $T\text{н}$ выражается через убыточность страховой суммы по формуле

$$T\text{о} = \frac{Sb}{S} \cdot 100.$$

В силу (5.1.20),

$$T\text{о} = Y \cdot 100. \tag{5.1.21}$$

Для применения методики необходима статистическая информация за ряд предыдущих лет о *суммах страховых выплат* и *совокупных страховых суммах* по рискам, принятым на страхование.

**Задача 5.1.2.** Определить страховой тариф на 2007 год по данным страховой статистики, приведенным в следующей Таблице 1.

Т а б л и ц а 1. Данные страховой статистики

| № п. п. | Год | Общая страховая сумма $S$ (тыс. руб.) | Общая страховое возмещение $Sb$ (тыс. руб.) |
|---|---|---|---|
| 1 | 2002 | 20000 | 400 |
| 2 | 2003 | 28000 | 700 |
| 3 | 2004 | 25000 | 800 |
| 4 | 2005 | 30000 | 900 |
| 5 | 2006 | 35000 | 1400 |

**Решение.** Рассчитывая с помощью формулы (5.1.20) по данным Таблицы 1 годовые убыточности $Y_i$ $(i=1,...,5)$ страховых сумм, заполним следующую Таблицу 2.

Т а б л и ц а 2. Данные об уровне убыточности по годам

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Убыточность $Y_i$ страховых сумм | 0,02 | 0,025 | 0,032 | 0,03 | 0,04 |

Будем строить *уравнение прямой линии регрессии* (*линейный тренд*) в виде:

$$Y_i^* = a_0 + a_1 \cdot i\,. \tag{5.1.22}$$

В соответствии с общей теорией для построения прямой линии регрессии воспользуемся *методом наименьших квадратов* $[17]$.

С этой целью введем *невязку*

$$D = D(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{5}\left(Y_i - Y_i^*\right)^2 = \sum_{i=1}^{5}\left(Y_i - a_0 - a_1 \cdot i\right)^2$$

и определим параметры $a_0$ и $a_1$ линейного тренда так, чтобы найти *минимум невязки* $D$.

Значения $a_0$ и $a_1$, доставляющие минимум функции $D$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial a_0} = \dfrac{\partial}{\partial a_0}\left[\sum\limits_{i=1}^{5}\left(Y_i - a_0 - a_1 i\right)^2\right] = -2\sum\limits_{i=1}^{5}\left(Y_i - a_0 - a_1 i\right) = 0, \\ \dfrac{\partial D}{\partial a_1} = \dfrac{\partial}{\partial a_1}\left[\sum\limits_{i=1}^{5}\left(Y_i - a_0 - a_1 i\right)^2\right] = -2\sum\limits_{i=1}^{5}\left(Y_i - a_0 - a_1 i\right) i = 0, \end{cases}$$

которую можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5} Y_i = \sum\limits_{i=1}^{5}\left(a_0 + a_1 i\right) = 5a_0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{5} i, \\ \sum\limits_{i=1}^{5} iY_i = \sum\limits_{i=1}^{5}\left(a_0 i + a_1 i^2\right) = a_0 \sum\limits_{i=1}^{5} i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{5} i^2, \end{cases}$$

и далее – к виду

$$\begin{cases} 5a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{5} i = \sum_{i=1}^{5} Y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{5} i + a_1 \sum_{i=1}^{5} i^2 = \sum_{i=1}^{5} iY_i. \end{cases} \tag{5.1.23}$$

В общем случае, когда статистические данные известны за $n$ лет, система уравнений (5.1.23) имеет вид

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} i + a_1 \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} iY_i. \end{cases}$$

Перейдем к решению системы (5.1.23).

Для этого, воспользовавшись данными из Таблицы 2, составим следующую Таблицу 3.

Т а б л и ц а 3. Коэффициенты системы (5.1.23)

| Год | $i$ | Убыточность $Y_i$ страховых сумм | $iY_i$ | $i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 2002 | 1 | 0,02 | 0,02 | 1 |
| 2003 | 2 | 0,025 | 0,05 | 4 |
| 2004 | 3 | 0,032 | 0,096 | 9 |
| 2005 | 4 | 0,03 | 0,12 | 16 |
| 2006 | 5 | 0,04 | 0,2 | 25 |
| Сумма | 15 | 0,147 | 0,486 | 55 |

Подставив данные из последней строки Таблицы 3 в систему (5.1.23), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 5a_0 + 15a_1 = 0{,}147, \\ 15a_0 + 55a_1 = 0{,}486. \end{cases} \tag{5.1.24}$$

Решением системы уравнений (5.1.24) является пара чисел

$$\begin{cases} a_0 = 0{,}0159, \\ a_1 = 0{,}0045. \end{cases} \tag{5.1.25}$$

Подставляя значения (5.1.25) в формулу (5.1.22), получаем уравнение прямой линии регрессии:

$$Y_i^* = 0{,}0159 + 0{,}0045 \cdot i\,. \qquad (5.1.26)$$

Подставив теперь в соотношение (5.1.26) значение $i = 6$, получим прогноз убыточности на 2007 год:

$$Y_6^* = 0{,}0429\,. \qquad (5.1.27)$$

Для вычисления основной части $T\text{о}$ нетто-ставки $T\text{н}$, полученное в (5.1.27) значение необходимо в соответствии с (5.1.21) *умножить на* 100 *рублей*:

$$T\text{о} = 0{,}0429 \cdot 100 = 4{,}29\,(\text{руб.}) \qquad (5.1.28)$$

Перейдем теперь к вычислению рисковой надбавки $T\text{р}$.

Сначала вычислим среднее квадратическое отклонение значений убыточности по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(Y_i - Y_i^*\right)^2}\,. \qquad (5.1.29)$$

Для этого удобно составить следующую Таблицу 4.

Т а б л и ц а 4. Расчет среднего квадратического отклонения

| $i$ | $Y_i$ | $Y_i^*$ | $Y_i^* - Y_i$ | $\left(Y_i^* - Y_i\right)^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,02 | 0,0204 | + 0,0004 | 0,00000016 |
| 2 | 0,025 | 0,0249 | - 0,0001 | 0,00000001 |
| 3 | 0,032 | 0,0294 | - 0,0026 | 0,00000676 |
| 4 | 0,03 | 0,0339 | + 0,0039 | 0,00001521 |
| 5 | 0,04 | 0,0384 | - 0,0016 | 0,00000256 |
| Сумма | | | | 0,0000247 |

Далее из формулы (5.1.29) получаем

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(Y_i-Y_i^*\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{5-1}\cdot\sum_{k=1}^{5}\left(Y_i-Y_i^*\right)^2}=\sqrt{\frac{0,0000247}{4}}=0,0025.$$

Для расчета рисковой надбавки $T$р используем следующую формулу

$$T\text{р}=\beta(\gamma,n)\cdot\sigma, \qquad (5.1.30)$$

где $\beta(\gamma,n)$ – коэффициент, величина которого зависит от заданной гарантии безопасности $\gamma$ и числа $n$ анализируемых лет. Значения коэффициента $\beta(\gamma,n)$ приведены в Таблице 6.5.

Допустим, страховая компания считает необходимым с уровнем вероятности $\gamma=0,9$ быть уверенной в том, что собранной суммы взносов достаточно для выплаты страховых возмещений. Тогда из Таблицы 6.5. для $\gamma=0,9$ и $n=5$ находим значение $\beta(\gamma,n)=1,984$.

Далее по формуле (5.1.30) получаем

$$T\text{р}=\beta(\gamma,n)\cdot\sigma=1,984\cdot0,0025=0,005.$$

Воспользовавшись, теперь (5.1.28), получим

$$T\text{н}=T\text{о}+T\text{р}=4,29+0,005=4,295.$$

Если доля нагрузки в тарифной ставке $T_\Delta$ составляет $30\%$, то тарифная ставка в соответствии с (5.1.19) рассчитывается по формуле:

$$T_\Delta=\frac{T\text{н}}{100\text{-}30}\cdot100=\frac{4,295}{70}\cdot100=6,14\,(\text{руб.}).$$

**Ответ:** 6,14 рубля.

## *5.2 Применения схемы независимых испытаний Бернулли*

Предположим, что страховая компания заключает $n$ одинаковых страховых договоров, каждый из которых предусматривает выплату страховой суммы $S$ в случае наступления страхового события.

У каждого из страхователей страховое событие (обозначим его символом $A$) может наступить независимо от других страхователей, и вероятность его наступления $P(A)=p$.

Это дает возможность моделировать рассматриваемую ситуацию, как серию из $n$ *независимых испытаний Бернулли*, в каждом из которых событие $A$ наступает с вероятностью $p$ (см. § 3.1).

Нашей целью является построение оценки величины нетто-премии $B$ в каждом из этих договоров, которая, с одной стороны, была бы минимальной, а, с другой стороны, достаточной для того, чтобы страхование данного типа не было бы для страховой компании убыточным.

Суммарная выплата страховой компании по всем договорам данного вида равна $k \cdot S$, где $k$ – количество появлений события $A$ в серии из $n$ независимых испытаний Бернулли, а суммарная нетто-премия равна $n \cdot B$.

Отсюда следует, что для *оценки вероятности неразорения* страховой компании необходимо оценить вероятность

$$P(k \cdot S \le n \cdot B) = P\left(k \le n \cdot \frac{B}{S}\right). \tag{5.2.1}$$

По интегральной теореме Муавра-Лапласа (*нормальное приближение для схемы Бернулли*)

$$P\left(k \le n \cdot \frac{B}{S}\right) \simeq \Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt,$$

$$x = \frac{n\frac{B}{S} - pn}{\sqrt{npq}}.$$

Будем считать, что руководство страховой компании устраивает вероятность γ (0<γ<1) того, что по данному типу страхования страховая компания будет работать устойчиво, и отметим, что практический опыт работы различных страховых компаний показывает, что уровень $\gamma = 0{,}97$ является вполне надежным.

Уровень устойчивости $\gamma = 0{,}97$ мы и будем использовать во всех дальнейших рассмотрениях, не оговаривая этого особо.

Найдем теперь $\gamma$ – *доверительный интервал*, т.е. все значения $x$, удовлетворяющие неравенству

$$\Phi(x) \geq \gamma .$$

Для этого найдем квантиль уровня $0{,}97$, т.е. такое значение $x$ $(x > 0)$, которое является решением уравнения

$$\Phi(x) = 0{,}97.$$

Поскольку

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt,$$

то возникает соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = 0{,}03,$$

позволяющее найти значение $x$ при помощи Таблицы 6.2. значений функции $u_\alpha$, которая определяется равенством

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{u_\alpha}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt .$$

В нашем случае, когда α=0,03, из Таблицы 6.2 находим значение $u_\alpha = x = 1{,}8808$, и получаем соотношение

$$\frac{n\frac{B}{S}-pn}{\sqrt{npq}}=\sqrt{n}\cdot\frac{B-Sp}{S\sqrt{pq}}=u_\alpha,$$

следствием которого является формула для определения нетто-премии:

$$B=Sp+\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}S\sqrt{pq}. \qquad (5.2.2)$$

*Замечание 1.* Первое слагаемое $Sp$ в правой части формулы (5.2.2) определяет *рисковую премию*, второе слагаемое

$$\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}S\sqrt{pq} \qquad (5.2.3)$$

определяет рисковую надбавку.

*Замечание 2.* Из формулы (5.2.3) следует, что в рассматриваемом нами случае рисковая надбавка *пропорциональна* среднему квадратическому отклонению $S\sqrt{pq}$ с коэффициентом пропорциональности $\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}$.

*Замечание 3.* В случае, если число страховых договоров $n$ достаточно велико, а нетто-премия $B$ определяется через страховую сумму $S$ по формуле

$$B=Sp+\frac{1{,}8808}{\sqrt{n}}S\sqrt{pq}, \qquad (5.2.4)$$

страховая компания будет работать с вероятностью неразорения $\gamma = 0{,}97$.

*Замечание 4.* В соответствии с формулами (4.1.1) и (5.2.2) для страхового тарифа $T_\Delta$ справедливо соотношение

$$T_\Delta=\frac{B}{S}\cdot 100(\text{руб.})=\left(p+\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{pq}\right)\cdot 100(\text{руб.})$$

**Задача 5.2.1.** Мужчины–страхователи в возрасте 50 лет, родившиеся 31 декабря, заключили 31 декабря со страховщиком *страховой договор на дожитие* сроком на 1 год со страховой суммой 100000 рублей. В случае смерти страхователя в период действия договора страховая сумма не выплачивается, а выгодоприобретателю выплачивается рисковая премия (без начисленных процентных денег). При дожитии страхователя до 31 декабря следующего года выгодоприобретателю выплачивается страховая сумма. Найти нетто-премию, воспользовавшись нормальным приближением для схемы Бернулли, если:

1) застраховалось 1600 человек;
2) застраховалось 400 человек.

**Решение**. С помощью таблицы смертности найдем следующие вероятности:

$$p_{50} = \frac{l_{51}}{l_{50}} = \frac{68353}{70354} = 0{,}9716,$$
$$q_{50} = 1 - p_{50} = 1 - 0{,}9716 = 0{,}0284.$$

В обозначениях, принятых в начале параграфа, получим

$$S = 100000, \quad p = 0{,}0284, \quad q = 0{,}9716.$$

В случае 1) из формулы (5.2.4) вытекает:

$$B = 100000 \cdot 0{,}0284 + \frac{1{,}8808}{\sqrt{1600}} \cdot 100000 \cdot \sqrt{0{,}0284 \cdot 0{,}9716} = 3621{,}06.$$

В случае 2)

$$B = 100000 \cdot 0{,}0284 + \frac{1{,}8808}{\sqrt{400}} \cdot 100000 \cdot \sqrt{0{,}0284 \cdot 0{,}9716} = 4402{,}12.$$

**Ответ:** $3621{,}06$ рублей и $4402{,}12$ рублей.

**Задача 5.2.2.** Страховая компания заключила $n = 400$ одинаковых страховых договоров, каждый из которых предусматривает выплату страховой суммы $S = 100000$ рублей в случае наступления страхового события. Вероятность наступления страхового события $p = 0{,}01$. Найти нетто-премию $B$, воспользовавшись Пуассоновским приближением для схемы Бернулли.

**Решение.** В обозначениях, принятых в начале параграфа, условие устойчивости страховой компании имеет вид:

$$P\left(k \le n\cdot \frac{B}{S}\right) > 0,97.$$

Найдем значение параметра распределения Пуассона:

$$\lambda = n\cdot p = 400\cdot 0,01 = 4.$$

Из Таблицы 6.3 значений функции

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

которая приведена в главе 6, для значения $\lambda = 4$ находим

$$P(k=0) + P(k=1) + ... + P(k=7) =$$
$$= 0,01832 + 0,07326 + 0,14653 + 0,19537 + 0,19537 + 0,15629 + 0,10419 + 0,05954 =$$
$$= 0,94887.$$

Кроме того, поскольку

$$P(k=8) = 0,02977,$$

то

$$\sum_{i=0}^{i=8} P(k=i) = 0,94887 + 0,02977 = 0,97864 > 0,97.$$

Следовательно,

$$n\cdot \frac{B}{S} = 8.$$

Поэтому

$$B = \frac{8}{n}\cdot S = \frac{8\cdot 100000}{400} = 2000\,(\text{руб.}).$$

**Ответ:** 2000 рублей.

*Замечание.* Если в условии задачи 5.2.2 число страховых договоров $n = 400$ заменить на число $n = 20$, оставив остальную часть условия без изменения, то нетто-премия увеличится и станет равной 5000 рублей.

Действительно, в этом случае

$$\lambda = n \cdot p = 20 \cdot 0,01 = 0,2.$$

Далее из Таблицы 6.3 получаем

$$P(k=0) + P(k=1) = 0,81873 + 0,16375 = 0,98248 > 0,97.$$

Поэтому

$$n \cdot \frac{B}{S} = 1,$$

следовательно, нетто-премия

$$B = \frac{1}{n} \cdot S = \frac{100000}{20} = 5000\,(\text{руб.})$$

# 6 Таблицы

**Т а б л и ц а 6.1. Значения функции Лапласа** $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$

| *x* | Сотые доли | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0,0** | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| **0,1** | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| **0,2** | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| **0,3** | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| **0,4** | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| **0,5** | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| **0,6** | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| **0,7** | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2704 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| **0,8** | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 03133 |
| **0,9** | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| **1,0** | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| **1,1** | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| **1,2** | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |
| **1,3** | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| **1,4** | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| **1,5** | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| **1,6** | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| **1,7** | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,4633 |
| **1,8** | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,4706 |
| **1,9** | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4756 | 0,4761 | 0,4767 |
| **2,0** | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4793 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4808 | 0,4812 | 0,4817 |
| **2,1** | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,4850 | 0,4854 | 0,4857 |
| **2,2** | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | 0,4875 | 0,4878 | 0,4881 | 0,4884 | 0,4887 | 0,4890 |
| **2,3** | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | 0,4904 | 0,4906 | 0,4909 | 0,4911 | 0,4913 | 0,4916 |
| **2,4** | 0,4918 | 0,4920 | 0,4922 | 0,4925 | 0,4927 | 0,4929 | 0,4931 | 0,4932 | 0,4934 | 0,4936 |
| **2,5** | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | 0,4945 | 04946 | 0,4948 | 0,4949 | 0,4951 | 0,4952 |
| **2,6** | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | 0,4959 | 0,4960 | 0,4961 | 0,4962 | 0,4963 | 0,4964 |
| **2,7** | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | 0,4969 | 0,4970 | 0,4971 | 0,4972 | 0,4973 | 0,4974 |
| **2,8** | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | 0,4977 | 0,4978 | 0,4979 | 0,4979 | 0,4980 | 0,4981 |
| **2,9** | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | 0,4984 | 0,4984 | 0,4985 | 04985 | 0,4985 | 0,4986 |
| **3,0** | 0,4987 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | 0,4988 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4990 | 0,4990 |

### Т а б л и ц а 6.2. Значения функции $u_\alpha$, определяемой равенством

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{u_\alpha}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt$$

| $\alpha$ | 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,015 | 0,020 | 0,025 | 0,030 | 0,035 | 0,040 | 0,045 | 0,050 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_\alpha$ | 3,0902 | 2,5758 | 2,3263 | 2,1701 | 2,0537 | 1,9600 | 1,8808 | 1,8119 | 1,7507 | 1,6954 | 1,6449 |

### Т а б л и ц а 6.3. Значения функции $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

| $k \backslash \lambda$ | **0,1** | **0,2** | **0,3** | **0,4** | **0,5** | **0,6** | **0,7** | **0,8** | **0,9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0,90484 | 0,81873 | 0,74082 | 0,67032 | 0,60653 | 0,54881 | 0,49659 | 0,44933 | 0,40657 |
| **1** | 0,09048 | 0,16375 | 0,22225 | 0,26813 | 0,30327 | 0,32929 | 0,34761 | 0,35946 | 0,36591 |
| **2** | 0,00452 | 0,01638 | 0,03334 | 0,05363 | 0,07582 | 0,09879 | 0,12166 | 0,14379 | 0,16466 |
| **3** | 0,00015 | 0,00109 | 0,00333 | 0,00715 | 0,01264 | 0,01976 | 0,02839 | 0,03834 | 0,04940 |
| **4** | | 0,00006 | 0,00025 | 0,00072 | 0,00158 | 0,00296 | 0,00497 | 0,00767 | 0,01112 |
| **5** | | | 0,00002 | 0,00006 | 0,00016 | 0,00036 | 0,00070 | 0,00123 | 0,00200 |
| **6** | | | | | 0,00001 | 0,0004 | 0,00008 | 0,00016 | 0,00030 |
| **7** | | | | | | | 0,00001 | 0,00002 | 0,00004 |

| $k \backslash \lambda$ | **1,0** | **2,0** | **3,0** | **4,0** | **5,0** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0,36788 | 0,13534 | 0,04979 | 0,01832 | 0,00674 |
| **1** | 0,36788 | 0,27067 | 0,14936 | 0,07326 | 0,03369 |
| **2** | 0,18394 | 0,27067 | 0,22404 | 0,14653 | 0,08422 |
| **3** | 0,06131 | 0,18045 | 0,22404 | 0,19537 | 0,14037 |
| **4** | 0,01533 | 0,09022 | 0,16803 | 0,19537 | 0,17547 |
| **5** | 0,00307 | 0,03609 | 0,10082 | 0,15629 | 0,17547 |
| **6** | 0,00051 | 0,01203 | 0,05041 | 0,10419 | 0,14622 |
| **7** | 0,00007 | 0,00344 | 0,02160 | 0,05954 | 0,10445 |
| **8** | 0,00001 | 0,00086 | 0,00810 | 0,02977 | 0,06528 |
| **9** | | 0,00019 | 0,00270 | 0,01323 | 0,03627 |
| **10** | | 0,00004 | 0,00081 | 0,00529 | 0,01813 |
| **11** | | 0,00001 | 0,00022 | 0,00193 | 0,00824 |
| **12** | | | 0,00006 | 0,00064 | 0,00343 |
| **13** | | | 0,00001 | 0,00020 | 0,00132 |
| **14** | | | | 0,00006 | 0,00047 |
| **15** | | | | 0,00002 | 0,00016 |
| **16** | | | | | 0,00005 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **17** | | | | | 0,00001 |

### Т а б л и ц а 6.4. Зависимость $\alpha(\gamma)$

| $\gamma$ | 0,84 | 0,90 | 0,95 | 0,98 | 0,9986 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha(\gamma)$ | 1,0 | 1,3 | 1,645 | 2,0 | 3,0 |

### Т а б л и ц а 6.5. Зависимость $\beta(\gamma, n)$

| $n$ \ $\gamma$ | **0,8** | **0,9** | **0,95** | **0,975** | **0,99** |
|---|---|---|---|---|---|
| **3** | 2,972 | 6,649 | 13,640 | 27,448 | 68,740 |
| **4** | 1,592 | 2,829 | 4,380 | 6,455 | 10,448 |
| **5** | 1,184 | 1,984 | 2,850 | 3,854 | 5,500 |
| **6** | 0,980 | 1,596 | 2,219 | 2,889 | 3,900 |

### Т а б л и ц а 6.6. Таблица смертности мужчин и женщин

| **Возраст** | **Мужчины** | | | **Женщины** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $l_x$ | $d_x$ | $q_x$ | $l_x$ | $d_x$ | $q_x$ |
| **0** | 100000 | 2047 | 0,0204 | 100000 | 1512 | 0,0151 |
| **1** | 97953 | 200 | 0,0020 | 98488 | 161 | 0,0016 |
| **2** | 97753 | 113 | 0,0011 | 98327 | 98 | 0,0009 |
| **3** | 97640 | 85 | 0,0008 | 98229 | 69 | 0,0007 |
| **4** | 97555 | 78 | 0,0008 | 98160 | 57 | 0,0005 |
| **5** | 97477 | 74 | 0,0007 | 98103 | 45 | 0,0004 |
| **6** | 97403 | 69 | 0,0007 | 98058 | 41 | 0,0004 |
| **7** | 97334 | 62 | 0,0006 | 98017 | 39 | 0,0003 |
| **8** | 97272 | 57 | 0,0005 | 97978 | 39 | 0,0003 |
| **9** | 97215 | 57 | 0,0005 | 97939 | 37 | 0,0003 |
| **10** | 97158 | 54 | 0,0005 | 97902 | 31 | 0,0003 |
| **11** | 97104 | 54 | 0,0005 | 97871 | 31 | 0,0003 |
| **12** | 97050 | 56 | 0,0005 | 97840 | 31 | 0,0003 |
| **13** | 96994 | 63 | 0,0006 | 97809 | 35 | 0,0003 |
| **14** | 96931 | 70 | 0,0007 | 97774 | 38 | 0,0003 |
| **15** | 96861 | 105 | 0,0010 | 97736 | 47 | 0,0004 |
| **16** | 96756 | 151 | 0,0015 | 97689 | 68 | 0,0006 |
| **17** | 96605 | 208 | 0,0021 | 97621 | 92 | 0,0009 |
| **18** | 96397 | 261 | 0,0027 | 97529 | 92 | 0,0009 |
| **19** | 96136 | 299 | 0,0031 | 97473 | 93 | 0,0009 |
| **20** | 95837 | 351 | 0,0036 | 97344 | 93 | 0,0009 |
| **21** | 95486 | 379 | 0,0039 | 97251 | 94 | 0,0009 |
| **22** | 95107 | 388 | 0,0040 | 97157 | 95 | 0,0009 |
| **23** | 94719 | 375 | 0,0039 | 97062 | 98 | 0,0010 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **24** | 94344 | 392 | 0,0041 | 96964 | 98 | 0,0010 |
| **25** | 93952 | 441 | 0,0046 | 96866 | 99 | 0,0010 |
| **26** | 93511 | 473 | 0,0050 | 96767 | 107 | 0,0011 |
| **27** | 93038 | 529 | 0,0056 | 96660 | 132 | 0,0013 |
| **28** | 92509 | 543 | 0,0058 | 96528 | 137 | 0,0014 |
| **29** | 91966 | 547 | 0,0059 | 96391 | 138 | 0,0014 |
| **30** | 91419 | 597 | 0,0065 | 96253 | 149 | 0,0015 |
| **31** | 90822 | 639 | 0,0070 | 96104 | 164 | 0,0017 |
| **32** | 90183 | 695 | 0,0077 | 95940 | 172 | 0,0017 |
| **33** | 89488 | 757 | 0,0084 | 95768 | 180 | 0,0018 |
| **34** | 88731 | 797 | 0,0089 | 95588 | 197 | 0,0020 |
| **35** | 87934 | 832 | 0,0094 | 95391 | 218 | 0,0022 |
| **36** | 87102 | 905 | 0,0103 | 95173 | 234 | 0,0024 |
| **37** | 86197 | 907 | 0,0105 | 94939 | 250 | 0,0026 |
| **38** | 85290 | 940 | 0,0110 | 94689 | 267 | 0,0028 |
| **39** | 84350 | 1006 | 0,0119 | 94422 | 279 | 0,0029 |
| **40** | 83344 | 1145 | 0,0137 | 94143 | 310 | 0,0032 |
| **41** | 82199 | 1198 | 0,0145 | 93833 | 344 | 0,0036 |
| **42** | 81001 | 1194 | 0,0147 | 93489 | 382 | 0,0040 |
| **43** | 79807 | 1208 | 0,0151 | 93107 | 417 | 0,0044 |
| **44** | 78599 | 1212 | 0,0154 | 92690 | 458 | 0,0049 |
| **45** | 77387 | 1292 | 0,0166 | 92232 | 449 | 0,0048 |
| **46** | 76095 | 1394 | 0,0183 | 91783 | 481 | 0,0052 |
| **47** | 74701 | 1379 | 0,0184 | 91302 | 512 | 0,0056 |
| **48** | 73322 | 1432 | 0,0195 | 90790 | 547 | 0,0060 |
| **49** | 71890 | 1536 | 0,0213 | 90243 | 571 | 0,0063 |
| **50** | 70354 | 2001 | 0,0284 | 89672 | 680 | 0,0075 |
| **51** | 68353 | 2107 | 0,0308 | 88992 | 847 | 0,0095 |
| **52** | 66246 | 2156 | 0,0325 | 88145 | 884 | 0,0100 |
| **53** | 64090 | 2143 | 0,0334 | 87261 | 966 | 0,0110 |
| **54** | 61947 | 2088 | 0,0337 | 86295 | 959 | 0,0111 |
| **55** | 59859 | 2028 | 0,0338 | 85336 | 949 | 0,0111 |
| **56** | 57831 | 1974 | 0,0341 | 84387 | 952 | 0,0112 |
| **57** | 55857 | 1917 | 0,0343 | 83435 | 954 | 0,0114 |
| **58** | 53940 | 1870 | 0,0346 | 82481 | 1009 | 0,0122 |
| **59** | 52070 | 1824 | 0,0350 | 81472 | 1012 | 0,0124 |
| **60** | 50246 | 2127 | 0,0423 | 80460 | 1121 | 0,0139 |
| **61** | 48119 | 2458 | 0,0510 | 79339 | 1334 | 0,0168 |
| **62** | 45661 | 2395 | 0,0524 | 78005 | 1499 | 0,0192 |
| **63** | 43266 | 2309 | 0,0533 | 76506 | 1621 | 0,0211 |
| **64** | 40957 | 2234 | 0,0545 | 74885 | 1745 | 0,0233 |
| **65** | 38723 | 2167 | 0,0559 | 73140 | 1785 | 0,0244 |
| **66** | 36556 | 2055 | 0,0562 | 71335 | 1812 | 0,0253 |
| **67** | 34501 | 2009 | 0,0582 | 69543 | 1834 | 0,0263 |
| **68** | 32492 | 1955 | 0,0601 | 67709 | 1844 | 0,0272 |
| **69** | 30537 | 1933 | 0,0633 | 65865 | 1914 | 0,0290 |
| **70** | 28604 | 1933 | 0,0675 | 63951 | 2075 | 0,0324 |
| **71** | 26671 | 1902 | 0,0713 | 61876 | 2198 | 0,0355 |
| **72** | 24769 | 1820 | 0,0734 | 59678 | 2375 | 0,0397 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **73** | 22649 | 1830 | 0,0785 | 57303 | 2515 | 0,0438 |
| **74** | 21146 | 1735 | 0,0820 | 54788 | 2712 | 0,0495 |
| **75** | 19411 | 1782 | 0,0918 | 52076 | 2987 | 0,0573 |
| **76** | 17629 | 1831 | 0,1038 | 49089 | 3173 | 0,0646 |
| **77** | 15798 | 1762 | 0,1115 | 45916 | 3337 | 0,0726 |
| **78** | 14036 | 1734 | 0,1235 | 42579 | 3538 | 0,0830 |
| **79** | 12302 | 1687 | 0,1371 | 39041 | 3399 | 0,0870 |
| **80** | 10615 | 1461 | 0,1376 | 35642 | 3301 | 0,0926 |
| **81** | 9154 | 1283 | 0,1401 | 32341 | 3287 | 0,1016 |
| **82** | 7871 | 1153 | 0,1464 | 29054 | 3224 | 0,1109 |
| **83** | 6718 | 1078 | 0,1604 | 25830 | 3156 | 0,1221 |
| **84** | 5640 | 960 | 0,1702 | 22674 | 3151 | 0,1389 |
| **85** | 4680 | 861 | 0,1839 | 19523 | 3001 | 0,1537 |
| **86** | 3819 | 791 | 0,2071 | 16522 | 2919 | 0,1766 |
| **87** | 3028 | 640 | 0,2113 | 13603 | 2618 | 0,1924 |
| **88** | 2388 | 529 | 0,2215 | 10985 | 2302 | 0,2095 |
| **89** | 1859 | 431 | 0,2318 | 8683 | 1979 | 0,2279 |
| **90** | 1428 | 348 | 0,2436 | 6704 | 1659 | 0,2474 |
| **91** | 1080 | 275 | 0,2546 | 5045 | 1355 | 0,2685 |
| **92** | 805 | 208 | 0,2583 | 3690 | 1073 | 0,2907 |
| **93** | 597 | 158 | 0,2644 | 2617 | 823 | 0,3144 |
| **94** | 439 | 138 | 0,3143 | 1794 | 610 | 0,3400 |
| **95** | 301 | 95 | 0,3156 | 1184 | 434 | 0,3665 |
| **96** | 206 | 66 | 0,3203 | 750 | 296 | 0,3946 |
| **97** | 140 | 45 | 0,3214 | 454 | 192 | 0,4229 |
| **98** | 95 | 32 | 0,3368 | 262 | 119 | 0,4541 |
| **99** | 63 | 22 | 0,3492 | 143 | 70 | 0,4895 |
| **100** | 41 | 41 | 1 | 73 | 73 | 1 |

## Примеры и задачи для самостоятельного решения

**1.** Автомобиль застрахован на сумму 20000 у.е. Размер ущерба 10000 у.е. Найти страховое возмещение по системе первого риска.

**Ответ:** 10000 у.е.

**2.** Автомобиль застрахован на сумму 20000 у.е. Размер ущерба 22000 у.е. Найти страховое возмещение по системе первого риска.

**Ответ:** 20000 у.е.

**3.** Автомобиль, стоимостью 16000 у.е., застрахован на сумму 12000 у.е. Величина ущерба 10000 у.е. Найти страховое возмещение по системе пропорционального возмещения ущерба.

**Ответ:** 7500 у.е.

**4.** Условная франшиза равна 6000 руб., а размер ущерба 5000 руб. Найти страховое возмещение.

**Ответ:** Ущерб не возмещается.

**5.** Условная франшиза равна 6000 руб., а размер ущерба 7000 руб. Найти страховое возмещение.

**Ответ:** 7000 руб.

**6.** Безусловная франшиза равна 6000 руб., а размер ущерба 5000 руб. Найти страховое возмещение.

**Ответ:** Ущерб не возмещается.

**7.** Безусловная франшиза равна 6000 руб., а размер ущерба 8000 руб. Найти страховое возмещение.

**Ответ:** 2000 руб.

**8.** Автомобильный завод застраховал по системе предельной ответственности доход от производства и продажи 6000 автомобилей, причем предел ответственности страховщика установлен в размере 70 % ущерба. Со страховщиком была согласована средняя цена реализации одного автомобиля – 7500 у.е., однако 1000 автомобилей было реализовано по цене 7700 у.е., 2000 автомобилей реализованы по цене 7600 у.е., а 3000 автомобилей реализованы по цене 7300 у.е. Найти страховое возмещение.

**Ответ:** 140000 у.е.

**9.** Банк предоставил клиенту кредит в размере 150000 рублей сроком на 1 год с годовой процентной ставкой 14%. Риск невозврата кредита застрахован по системе предельной ответственности, причем предел ответственности страховщика установлен в размере 60 % ущерба. Найти страховое возмещение в случае невозврата кредита.

**Ответ:** 102600 рублей.

**10.** Заемщик 01.01.07. взял в банке кредит на сумму $ 500000 сроком на 1 год с годовой процентной ставкой 20%. Погашение кредита (вместе с процентными деньгами) должно осуществляться ежемесячно в равных долях. Банк застраховал риск непогашения кредита. Предел ответственности страховщика – 70%, страховой тариф – 4%. Страховая премия уплачивается в рассрочку при помощи ежемесячных страховых взносов, комиссия за рассрочку не взимается. Составить график страховых взносов.

**Ответ:** График страховых взносов приведен в Таблице.

Т а б л и ц а. График страховых взносов

| **Месяц** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Страховой взнос (тыс. руб.)** | 15,4 | 14 | 12,6 | 11,2 | 9,8 | 8,4 | 7 | 5,6 | 4,2 | 2,8 | 1,4 | 0 |

**11.** Объект, стоимостью 1 млн. у. е., застрахован на условиях сострахования четырьмя страховщиками, доли которых равны 400, 200,100 и 50 тысяч у. е. соответственно. Ущерб, возникший в результате страхового события, составил 600 тысяч у. е. Найти страховое возмещение, выплачиваемое каждым из страховщиков, если применяется система пропорциональной ответственности.

**Ответ:** 320 тыс. у. е.,160 тыс. у. е.,80 тыс. у. е.,40 тыс. у. е.

**12.** Страхователь застраховал объект, стоимостью 900000 у.е., у двух страховщиков на суммы 400000 у.е., и 600000 у.е. соответственно. В результате наступления страхового события объект был уничтожен полностью. Найти страховое возмещение, выплачиваемое каждым из страховщиков.

**Ответ:** $360000$ у.е., $540000$ у.е.

**13.** По договору квотного перестрахования перестраховщик принимает на свою ответственность 40% страховой суммы по каждому договору страхования имущества предприятий, но не более 5 млн. у.е. Цедент заключил три договора страхования имущества на суммы 11, 12 и 13 млн. у.е. соответственно. Определить участие цедента и цессионария в покрытии рисков.

**Ответ.** Цедент покрывает $4{,}4$(млн.у.е.), $4{,}8$(млн.у.е.), $5$(млн.у.е.), цессионарий покрывает $5{,}6$(млн.у.е.), $7{,}2$(млн.у.е.), $7$(млн.у.е.).

**14.** Приоритет цедента установлен в размере 20 тыс. у.е. Эксцедент составляет 5 линий. Лимит ответственности цессионария – 80 тыс. у.е. Найти размер ответственности цессионария в договорах страхования на суммы: **а)** 50 тыс. у.е., **б)** 100 тыс. у.е, **в)** 150 тыс. у.е., и определить требуется ли ретроцессия?

**Ответ: а)** 40 тыс. у.е., ретроцессия не требуется; **б)** 80 тыс. у.е., ретроцессия не требуется; **в)** 80 тыс. у.е., в ретроцессию нужно передать 40 тыс. у.е..

**15.** Приоритет цедента 1 млн. долл. Лимит ответственности цессионария – 4 линии. Лимит ответственности ретроцессионария – 6 линий (сверх покрытия цессионария). Найти распределение ответственности в процентах между цедентом, цессионарием и ретроцессионарием по договору страхования со страховой суммой 10 млн. долл.

**Ответ:** 10%, 40%, 50%.

**16.** По договору перестрахования эксцедента убытка приоритет цедента предусмотрен в размере 4 млн. рублей, а лимит перестраховочного покрытия цессионария – 3 млн. рублей. Цедент в результате наступления страхового события выплатил страхователю страховое возмещение в сумме 6 млн. рублей. Найти сумму возмещения убытков цессионарием цеденту.

**Ответ:** 2 млн. рублей.

**17.** По условиям договора о перестраховании эксцедента убыточности перестраховщик обязан произвести страховую выплату цеденту в случае, если *выплаты страховщика по возмещению ущерба* превысят за год уровень в 100%. Лимит ответственности перестраховщика – 115%. За год страховщик собрал страховую премию в объеме 50 млн. долларов, а выплатил страховое возмещение в объеме 58 млн. долларов. Какую сумму выплатит перестраховщик цеденту?

**Ответ:** 5 млн. долларов.

**18**. Автомобиль, стоимостью 18000 у.е., страхуется по системе каско. Вероятность наступления страхового события 3%. Найти рисковую премию.

**Ответ:** 540 у.е.

**19**. Страховая стоимость объекта 100 млн. рублей. Вероятность повреждения объекта от одной опасности 2%, от другой опасности – 1%. Опасности независимы друг от друга. Найти:

**1)** рисковую премию, в случае, если объект страхуется от наступления хотя бы одной из опасностей;

**2)** рисковую премию, в случае, если объект страхуется от одновременного наступления обеих опасностей.

**Ответ:** **1)** 2980000 рублей, **2)** 20000 рублей.

**20**. Вероятность наступления страхового события 0,02. Размер ущерба, возникающего в случае, если страховое событие произошло, имеет распределение

| | | |
|---|---|---|
| 30000 у.е. | 24000 у.е. | 18000 у.е. |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

.

Найти рисковую премию.

**Ответ:** 520 у.е.

**21**. Вероятность наступления страхового события 0,02. Размер ущерба, возникающего в случае, если страховое событие произошло, распределен равномерно на отрезке $\left[0, 40000\,(\text{у.е.})\right]$. Найти рисковую премию.

**Ответ:** $400$ у.е.

**22.** Вероятность наступления страхового события 0,02. Размер ущерба, возникающего в случае, если страховое событие произошло, распределен равномерно на отрезке $\left[0, 40000\,(\text{у.е.})\right]$. Лимит ответственности страховщика $30000$ у.е.. Найти рисковую премию.

**Ответ:** $375$ у.е.

**23.** Вероятность наступления страхового события 0,01. Размер ущерба, возникающего в случае, если страховое событие произошло, имеет показательное распределение с параметром. $\lambda = 0{,}001$ Лимит ответственности страховщика $1000$ у.е. Найти рисковую премию.

**Ответ:** $6{,}32\,(\text{у.е.})$

**24.** Найти вероятность для женщины 45 лет умереть в течение года.

**Ответ:** $0{,}0049$ **.**

**25.** Найти вероятность для женщины 50 лет дожить до 70 лет.

**Ответ:** $0{,}7132$ **.**

**26.** Найти округленную среднюю продолжительность оставшейся жизни для женщины в возрасте 70 лет.

**Ответ:** $10{,}94$ года.

**27.** Женщина (страхователь) в возрасте 50 лет, родившаяся 31 декабря, заключила со страховщиком 31 декабря 2006 года *страховой договор на дожитие* сроком на 5 полных лет со страховой суммой 200000 рублей. По условиям договора страховая премия вносится в рассрочку при помощи одинаковых страховых взносов, осуществляемых 1-го января каждого года в период действия договора. За пользование рентными суммами страховщик начисляет на них процентные деньги с годовой процентной ставкой 6%. В случае смерти страхователя в период действия договора страховая сумма не выплачивается, а выгодоприобретателю выплачивается сумма накопленных к этому моменту страховых платежей (без начисленных процентных денег). В случае дожития страхователя до указанного в договоре срока выгодоприобретателю выплачивается страховая сумма. Найти величину страхового взноса, если при начислении процентов используется:

**1)** схема простых процентов;

**2)** схема сложных процентов.

**Ответ: 1)** 32 259,19 рублей; **2)** 31 827,63 рублей.

**28.** Страховая компания планирует заключить 9000 договоров страхования имущества. Вероятность наступления страхового случая 0,04. Средняя страховая сумма 450000 рублей. Среднее страховое возмещение при наступлении страхового события 150000 рублей. Данных о разбросе возможных страховых возмещений нет. Возможные страховые возмещения не должны превысить собранных страховых премий с вероятностью 0,95. Доля нагрузки в структуре страхового тарифа 35%. Рассчитать страховой тариф, пользуясь первой методикой Росстрахнадзора.

**Ответ:** 1,83 рублей.

**29.** Страховая компания планирует заключить 8000 договоров страхования граждан от несчастных случаев. Вероятность наступления страхового случая 0,04. Средняя страховая сумма 20000 рублей. Среднее страховое возмещение при наступлении страхового события 8000 рублей. Средний разброс возможных страховых возмещений 4000 рублей. Возможные страховые возмещения не должны превысить собранных страховых премий с вероятностью 0,95. Доля нагрузки в структуре страхового тарифа 35%. Рассчитать страховой тариф, пользуясь первой методикой Росстрахнадзора.

**Ответ:** 2,65 рублей.

**30.** Страховая компания проводит оба вида страхования, описанные в задачах 28 и 29. Рассчитать страховые тарифы, пользуясь первой методикой Росстрахнадзора.

**Ответ:** $1{,}71$ рублей для страхования имущества, $2{,}74$ рублей для страхования от несчастных случаев.

**30.** Рассчитать с помощью второй методики Росстрахнадзора страховой тариф на 2007 год по данным страховой статистики, приведенным в следующей Таблице.

Т а б л и ц а. Данные страховой статистики

| № п. п. | Год | Общая страховая сумма $S$ (тыс. руб.) | Общая страховое возмещение $Sb$ (тыс. руб.) |
|---|---|---|---|
| 1 | 2002 | 25000 | 500 |
| 2 | 2003 | 24000 | 600 |
| 3 | 2004 | 30000 | 900 |
| 4 | 2005 | 40000 | 1100 |
| 5 | 2006 | 50000 | 1600 |

**Ответ:** $4{,}98$ рубля.

**31.** 2500 женщин–страхователей в возрасте 55 лет, родившихся 31 декабря, заключили 31 декабря со страховщиком *страховой договор на дожитие* сроком на 1 год со страховой суммой 80000 рублей. В случае смерти страхователя в период действия договора страховая сумма не выплачивается, а выгодоприобретателю выплачивается рисковая премия (без начисленных процентных денег). При дожитии страхователя до 31 декабря следующего года выгодоприобретателю выплачивается страховая сумма. Найти нетто-премию, воспользовавшись нормальным приближением для схемы Бернулли, если уровень устойчивости $\gamma = 0{,}97$.

**Ответ:** $1203{,}28$ рублей.

**32.** Страховая компания заключила $300$ одинаковых страховых договоров, каждый из которых предусматривает выплату страховой суммы $50000$ в случае наступления страхового события. Вероятность наступления страхового события $0,001$. Найти нетто-премию, воспользовавшись Пуассоновским приближением для схемы Бернулли, если уровень устойчивости $\gamma = 0,97$.

**Ответ:** $500$ рублей.

# Список использованных источников

1. Баланова Т.А., Алехина Е.С. Сборник задач по страхованию. – М.: Проспект, 2004.
2. Бойков А.В. Страхование и актуарные расчеты. – М.: РОХОС, 2004.
3. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983.
4. Бурроу К. Основы страховой статистики. – М.: Анкил, 1992.
5. Гвозденко А.А. Основы страхования. – М.: Финансы и статистика, 2003.
6. Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1983.
7. Касимов Ю.Ф. Введение в актуарную математику (страхования жизни и пенсионных схем). – М.: Анкил, 2001.
8. Корнилов И.А. Основы страховой математики.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
9. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики. – М.: Дело, 1998.
10. Распоряжение Федеральной службы РФ по надзору за страховой деятельностью от 8 июля 1993 г. № 02-03-36.
11. Рябикин В.И. Актуарные расчеты. – М.: Финстатинформ, 1996.
12. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. – М.: МГУ, 2002.
13. Фалин Г.И, Фалин А.И. Теория риска для актуариев в задачах. – М.: МГУ, 2001.
14. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – СПб.: Лань, 2006.
15. Четыркин Е.М. Актуарные расчеты в негосударственном пенсионном страховании. – М.: Дело, 1999.
16. Шахов В.В. Страхование. – М.: ЮНИТИ, 2001.
17. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: МЦМНО, 2004.

# Оглавление