1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Матрицы

Понятие числовой матрицы. Прямоугольная, квадратная, диагональная, единичная матрицы, матрица-строка, матрица–столбец, нулевая матрица. Сравнение, транспонирование матриц. Сложение (вычитание) матриц, умножение матрицы на число. Произведение матриц. Элементарные преобразования матриц.

Матрица размерности $m \times n$ - это прямоугольная таблица чисел или выражений, состоящая из m - строк и n – столбцов, заключенная в круглые или квадратные скобки.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ -- матрица в общем виде;

Для обозначения матриц используют большие буквы латинского алфавита: A, B, C…

Число или выражение, расположенное на пересечении i-ой строки и j-го столбца называется *элементом матрицы* (a_{ij}). Если все элементы матрицы - действительные числа, то матрица называется *числовой*. Например

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Видим, что для матрицы А элементы $a_{12} = -1, \quad a_{22} = 4$, для матрицы В элементы $b_{32} = -3, \quad b_{41} = 1$.

Размерность матрицы обозначают $m \times n$, где m - число строк, а n - число столбцов матрицы. Например, размерность матрицы A - 2×2 (две строки и два столбца), матрицы B - 4×2 (4 строки и два столбца), матрицы C - 3×3.

Строки и столбцы матрицы называют ее *рядами*. Под двумя параллельными рядами понимаются две строки или два столбца.

Главную диагональ образуют элементы a_{11}; a_{22}; a_{33};…; a_{mm}.

Две матрицы называются *равными,* если они одинаковой размерности и все их соответствующие элементы равны.

Квадратной называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$). Например, матрицы

$$[a_1], \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

являются квадратными матрицами соответственно первого, второго и третьего порядков.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие не на главной диагонали, равны нулю.

Единичной называется диагональная матрица, у которой каждый элемент, стоящий на главной диагонали равен единице. Обозначают единичную матрицу буквой E. Например, матрицы

$$E_1 = (1); \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

единичные матрицы первого, второго и третьего порядка.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Треугольной называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю.

Трапециевидной называется прямоугольная матрица, все элементы которой, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & 7 & 8 & 10 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 15 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицей-строкой называется матрица, состоящая из одной строки. Например $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица-строка размерности 1×4, то есть одна строка и четыре столбца.

Матрицей-столбцом называется матрица, состоящая из одного столбца.

Например $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 15 \\ 7 \\ 45 \end{pmatrix}$ матрица-столбец размерности 6×1, то есть шесть строк и один столбец.

Симметрической называется матрица, элементы которой, симметричные относительно главной диагонали равны между собой.

Для матриц существую операции транспонирования, сложения, вычитания, умножение матрицы на число, умножение матриц.

Транспонирование матриц. Чтобы транспонировать матрицу, надо ее строки записать в виде столбцов.

Например, если исходная матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, то транспонированная матрица $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ Если $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, то $B^T = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Сложение (вычитание) матриц. Чтобы сложить (или вычесть) две матрицы, нужно сложить (или вычесть) их соответствующие элементы. Складывать и вычитать можно только матрицы одинаковой размерности!

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 6-3 & -2+4 \\ 0+5 & 3+2 & 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц.

Матрицы называются *согласованными*, если количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.

!!!Умножать можно только согласованные матрицы!

Пусть, матрица A имеет размерность $m \times k$, а матрица B имеет размерность $k \times n$. Тогда матрицы согласованы и их можно умножать. В результате умножения получается матрица $C = A \cdot B$, размерность которой будет $m \times n$ (количество строк из первой матрицы, количество столбцов из второй матрицы).

Например, матрица A размерности 3×4, матрица В размерности 4×2, то матрица $C = A\cdot B$ будет размерности 3×2. Для краткости будем записывать следующим образом:

$$A_{3\times 4}\cdot B_{4\times 2} = C_{3\times 2}$$

Элемент матрицы С, находящийся на пересечении i-ой строки и j-го столбца равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В.

Пример. Даны матрицы $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ - размерность 2×3

и $B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ - размерность 3×2.

Матрицы согласованы. Найдем их произведение $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2} = C_{2\times 2}$, то есть в результате должна получиться матрица размерности 2×2. Итак,

$$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2} = C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1-12+8 & -4+10+28 \\ 3-24-6 & 12+20-21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 34 \\ -27 & 11 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим подробнее. Элемент c_{11} находится в первой строке и первом столбце матрицы *C*, значит он равен сумме произведений соответствующих элементов первой строки первой матрицы и первого столбца второй матрицы:

$$c_{11} = -1\cdot 1 + 2\cdot(-6) + 4\cdot 2 = -1-12+8 = -5$$

Элемент c_{12} находится в первой строке и втором столбце матрицы *C*, значит он равен сумме произведений соответствующих элементов первой строки первой матрицы и второго столбца второй матрицы:

$$c_{12} = -1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 4\cdot 7 = -4+10+28 = 34$$

Элемент c_{21} находится во второй строке и первом столбце матрицы *C*, значит он равен сумме произведений соответствующих элементов второй строки первой матрицы и первого столбца второй матрицы:

$$c_{21} = 3\cdot 1 + 4\cdot(-6) + (-3)\cdot 2 = 3-24-6 = -27$$

Элемент c_{22} находится во второй строке и втором столбце матрицы C, значит он равен сумме произведений соответствующих элементов второй строки первой матрицы и второго столбца второй матрицы:

$$c_{22} = 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + (-3)\cdot 7 = 12 + 20 - 21 = 11$$

Замечание. Если матрицу A можно умножить на матрицу B, то отсюда не следует, что матрицу B можно умножить на матрицу A, так как из согласованности матрицы A с матрицей B не следует согласованность матрицы B с матрицей A, то есть в общем случае A B ≠·B·A. Если A·B=B·A, то матрицы называются перестановочными или коммутативными.

Пример. Найти произведение матриц.

$$A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \left|\begin{matrix} \text{матрицы согласованы;} \\ \text{получаем матрицу } 2\times 2 \end{matrix}\right| =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + 4\cdot 2 & 2\cdot 6 + 4\cdot 4 \\ 1\cdot 5 + 2\cdot 2 & 1\cdot 6 + 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 28 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Первую строку матрицы A умножаем на первый столбец матрицы B:

$$c_{11} = 2\cdot 5 + 4\cdot 2 = 18.$$

Первую строку матрицы A умножаем на второй столбец матрицы B:

$$c_{12} = 2\cdot 6 + 4\cdot 4 = 28.$$

Вторую строку матрицы A умножаем на первый столбец матрицы B:

$$c_{21} = 1\cdot 5 + 2\cdot 2 = 9.$$

Вторую строку матрицы A умножаем на второй столбец матрицы B:

$$c_{22} = 1\cdot 6 + 2\cdot 4 = 14.$$

Пример. Найти произведение матриц.

$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}}\cdot\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \left|\begin{matrix} \text{матрицы согласованы;} \\ \text{получаем матрицу } 3\times 2 \end{matrix}\right| = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0+9+1 & -4-9+1 \\ 0+9+2 & 8-9+2 \\ 0+15+1 & -4-15+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 11 & 1 \\ 16 & -18 \end{pmatrix}$$

Пример. Выполнить действия и найти матрицу $C = A\cdot B + \alpha\cdot D^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha = 2$$

Решение. Подставим данные в выражение

$$\underset{3\times3}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times2}{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \underset{3\times2}{\begin{pmatrix} 2+9+0 & -6+0+0 \\ -1+6+2 & 3+0+1 \\ 0+6+6 & 0+0+3 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 7 & 4 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 11 & 0 \\ 24 & 9 \end{pmatrix}$$

1.2. Определители

Понятие определителя. Вычисление определителей 2го и 3го порядка. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление определителей высших порядков.

Определитель - это числовая характеристика квадратной матрицы. Для обозначения определителя используют прямые скобки и символы Δ или ΔA или $det\ A$.

Обратим внимание на различие обозначений матрицы и определителя. Квадратная матрица первого порядка A= (a_{11}) имеет определитель первого порядка $\Delta A = |a_{11}|$.

Квадратная матрица второго порядка A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

имеет определитель второго порядка $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Матрица A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ - имеет $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Вычисление определителя второго порядка. Определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{22}$$

Пример. Вычислить определители второго порядка.

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 6\cdot 4 = 10 - 24 = -14$ в) $\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 8 = 19$

б) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -2\cdot 7 - 4\cdot(-3) = -14 + 12 = -2$ г) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 16 = 7$

Вычисление определителя третьего порядка

Определитель третьего порядка вычисляется по правилу «треугольников» (рис. 1) или по правилу «звездочки» (рис. 2)

Рис. 1. Правило «треугольников»

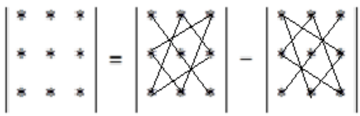
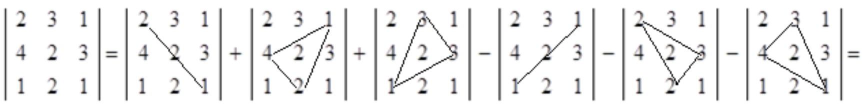


Рис. 2 Правило «звездочки»

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

По правилу «треугольников» строим схему



и находим произведения указанных в схеме элементов

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{2\cdot 2\cdot 1}_{4} + \underbrace{4\cdot 2\cdot 1}_{8} + \underbrace{3\cdot 3\cdot 1}_{9} - \underbrace{1\cdot 2\cdot 1}_{2} - \underbrace{3\cdot 2\cdot 2}_{12} - \underbrace{4\cdot 3\cdot 1}_{12} =$$

$$= 4 + 8 + 9 - 2 - 12 - 12 = -5$$

Пример p. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix}$.

По правилу «треугольников» строим схему и находим произведения указанных в схеме элементов

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \underbrace{-2\cdot 3\cdot(-4)}_{24} + \underbrace{1\cdot 4\cdot(-3)}_{-12} + \underbrace{0\cdot 2\cdot 1}_{0} - \underbrace{1\cdot 3\cdot(-3)}_{-9} - \underbrace{1\cdot 0\cdot(-4)}_{0} - \underbrace{4\cdot 2\cdot(-2)}_{-16} =$$

$$= 24 - 12 + 9 + 16 = 12 + 25 = 37$$

Свойства определителей

1. Величина определителя не меняется при его транспонировании.
2. При перестановке двух столбцов (или строк) определитель меняет свой знак на противоположный.
3. Определитель с двумя одинаковыми рядами равен нулю.
4. Определитель с нулевой строкой (или столбцом) равен нулю.
5. Общий множитель какой-либо строки (или столбца) можно выносить за знак определителя
6. Определитель, в котором соответственные элементы двух столбцов (или строк) пропорциональны, равен нулю.
7. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторого столбца (или строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на число, не равное нулю.

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \textit{к элементам 2й строки} \\ \textit{прибавим элементы 3й строки} \\ \textit{умноженныйна число } -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1+1(-5) & 3+4(-5) & 2+(-4)(-5) \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -4 & -17 & 22 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$

8. Если каждый элемент n-го столбца (или n-ой строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в n-ом столбце (или соответственно в n-ой строке) имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой - вторые; элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же.

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель. Используем свойство 7 и приведем определитель к треугольному виду (то есть сделаем все элементы ниже главной диагонали равными нулю).

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} =$$

Поменяем местами 1ю и 2ю строки. При этом знак определителя изменится на противоположный (св-во 2).

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} =$$

К элементам 2й строки прибавим соответствующие элементы 1й строки, умноженные на число 2.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2+1\cdot 2 & 0+3\cdot 2 & -3+2\cdot 2 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} =$$

Из элементов 3й строки вычтем элементы 1й строки.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1-1 & 4-3 & -4-2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} =$$

К элементам 2й стр. прибавим элементы 3й строки, умноженные на число (-6)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0+0(-6) & 6+1(-6) & 1+(-6)(-6) \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 37 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} =$$

Переставим 2ю и 3ю строки, при этом поменяется знак определителя.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \textit{вычислим по правилу} \\ \textit{треугольников} \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 37 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 37$$

Чтобы дать общее определение определителя, надо ввести понятия минора и алгебраического дополнения.

Минор Mij - элемента a_{ij} - это определитель, полученный из исходного определителя вычеркиванием *i*- ой строки и *j*-го столбца на пересечении которых расположен элемент a_{ij}..

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} - это число, вычисляемое по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} .$$

Значит, если сумма индексов i и j четная, то A_{ij} и M_{ij} ничем не отличаются. Если же сумма индексов i и j нечетная, то A_{ij} и M_{ij} отличаются только знаком.

Пример. Найдем некоторые миноры и алгебраические дополнения для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

а) минор M_{11} элемента a_{11} получаем вычеркиванием из матрицы A первой строки и первого столбца.

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{-2} \\ \cancel{3} & -4 & 3 \\ \cancel{0} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем $M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4 - 6 = -10$;

б) минор M_{23} элемента a_{23} получаем вычеркиванием из матрицы A второй строки и третьего столбца.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \cancel{-2} \\ \cancel{3} & \cancel{-4} & \cancel{3} \\ 0 & 2 & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

Получаем $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 0 \cdot 4 = 6$;

в) алгебраическое дополнение A_{11} вычислим по формуле:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot (-10) = -10;$$

г) алгебраическое дополнение A_{23} вычислим по формуле:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 6 = -6$$

Вычисление определителей высших порядков. Определитель (любого порядка) равен сумме произведений элементов некоторой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Рассмотрим на примере определителя третьего порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \ -\text{по } 1 \text{ строке} \\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \ -\text{по } 2 \text{ строке} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{13}A_{13} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \ -\text{по } 3 \text{ столбцу} \end{cases}$$

То есть всего таких разложений можно записать шесть: по элементам первой, второй, третьей строки или по элементам первого, второго или третьего столбца.

Пример. Вычислить определитель разными способами: по правилу «треугольников», разложением по первой строке, затем по третьему столбцу, затем по второй строке.

а) по правилу «треугольников» $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 3 - 3 + 8 = 20$

б) Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} - 3 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 - 3 = 20$$

в) Разложим определитель по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{13} - 1 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{33} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 11 + 2 \cdot 6 = 20$$

г) Разложим определитель по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{22} - 1 \cdot A_{23} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 + 11 = 20.$$

Заметим, что чем больше нулей в строке, по которой раскладываем, тем проще вычисления.

Например, раскладывая следующий определитель по первому столбцу, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 4\cdot A_{31} = 0+0+4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot 18 = 72 .$$

Среди свойств определителей есть свойство 7, позволяющее получать (накапливать) нули в строке или столбце. Используем это свойство в следующих примерах.

Пример. Вычислить определитель, накапливая нули

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{умножим элементы} \\ \textit{2го столбца на } -5 \textit{ и} \\ \textit{прибавим к 3му столбцу} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{во 2й строке стало} \\ \textit{два нуля, расклады}- \\ \textit{ваем по 2й строке} \end{pmatrix} =$

$= 0\cdot A_{21} + 1\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23} = 0 + (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 28 = 16 .$

б) Возьмем этот же определитель и получим нули, например, в первой строке.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{Элементы второго столбца} \\ \textit{умножим на } -2 \textit{ и прибавим} \\ \textit{к первому столбцу} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

Один ноль в первой строке уже есть. Элементы второго столбца умножим на 2 и прибавим к третьему столбцу. Получим:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{раскладываем по} \\ \textit{первой строке} \end{pmatrix} = 1\cdot A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -(-16-0) = 16$$

Определители более высоких порядков вычисляются таким же образом.

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка: а) разложив по любой строке или любому столбцу; б) накопив предварительно нули.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{третья строка уже} \\ \textit{содержит два нуля.} \\ \textit{Разложим по третьей} \\ \textit{строке} \end{pmatrix} = 2\cdot A_{31} + 6\cdot A_{34} =$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 6 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-3+7-4+18) - 6\cdot(-7-6+15+4) = 2\cdot 18 - 6\cdot 6 = 0$$

б) Получим дополнительный ноль, например, во втором столбце. Для этого из элементов четвертой строки вычтем элементы второй строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ 5-2 & -1-(-1) & 7-4 & 6-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

Разложим по второму столбцу

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{вычислим по} \\ \text{правилу треугольников} \end{pmatrix} = -(54-6-18-30) = 0.$$

1.3. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Понятия о системе уравнений и ее решении. Совместная, несовместная, определенная, неопределенная СЛАУ. Метод Крамера. Метод Гаусса.

Системой из m линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными называется выражение вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где a_{ij} - коэффициенты при неизвестных; x_j - неизвестные;
b_i - свободные члены уравнений (свободные от неизвестных).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- матрица коэффициентов при неизвестных. Или основная матрица системы уравнений. Размерность матрицы $m \times n$, то есть m - строк и n - столбцов.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- матрица свободных членов уравнений. Размерность матрицы $m \times 1$, то есть m - строк и 1 столбец.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- матрица неизвестных. Размерность матрицы $n \times 1$, то есть n - строк и 1 столбец.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- расширенная матрица системы уравнений. К основной матрице системы уравнений присоединена матрица *B*.

Система линейных алгебраических уравнений может быть записана *в матричной форме:*

$$AX = B.$$

Решением системы линейных уравнений называется упорядоченная совокупность чисел ($x_1, x_2, \dots, x_n$), которые, будучи подставленными вместо неизвестных во все уравнения системы, обращают эти уравнения в верные равенства.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение; и *несовместной*, если не имеет решений.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если имеет единственное решение; и *неопределенной*, если система имеет множество решений.

Система уравнений может иметь единственное решение X или множество решений. В последнем случае различают *общее решение* $X_{О.Р.}$ (неизвестные зависят от одной или нескольких произвольных постоянных) и *частное решение* $X_{Ч.Р.}$ (произвольным постоянным придаются некоторые значения, неизвестные пересчитываются и получают определенные значения). Частных решений бесконечное множество. Решение системы может быть записано перечислением неизвестных или в виде матрицы (столбца или строки).

Метод Крамера.

Суть метода Крамера заключается в применении формул Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta A},$$

где x_j - неизвестные системы уравнений, то есть x_1, x_2, x_3, и т.д.;

Δ_j - вспомогательные определители, то есть Δ_1, Δ_2, Δ_3, и т.д.;

ΔA - определитель матрицы коэффициентов или основной определитель системы уравнений.

Замечание: если ΔA=0, то нельзя применять формулы Крамера. Если ΔA не существует, то есть матрица А не квадратная, также нельзя применять формулы Крамера.

Рассмотрим на примере решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

Пример. Решить систему уравнений и выполнить проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Запишем систему уравнений в матричной форме, то есть составим
A - матрицу коэффициентов при неизвестных,
X - матрицу неизвестных,
B - матрицу свободных членов уравнений.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -8 & -3 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Система уравнений содержит три неизвестных, значит, для применения формул Крамера нужно вычислить определитель основной матрицы ΔA и три вспомогательных определителя Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$$

- определитель основной матрицы системы уравнений. Первый столбец составлен из коэффициентов при первой неизвестной. Второй столбец – из коэффициентов при второй неизвестной. Третий столбец – из коэффициентов при третьей неизвестной.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -20$$

- чтобы составить вспомогательный определитель Δ_1 нужно вместо первого столбца записать столбец из матрицы В. Остальные столбцы записать из матрицы А.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

- чтобы составить вспомогательный определитель Δ_2 нужно вместо второго столбца записать столбец из матрицы В. Остальные столбцы записать из матрицы А.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \end{vmatrix} = -20$$

- чтобы составить вспомогательный определитель Δ_3 нужно вместо третьего столбца записать столбец из матрицы В. Остальные столбцы записать из матрицы А.

По формулам Крамера найдем неизвестные

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-20} = 0\ ; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

Ответ : $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

Сделаем *проверку,* для этого найденное решение подставим во все уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot 1 - 1 = 1 \\ 2\cdot 1 + 4\cdot 0 - 1 = 1 \\ 1 - 8\cdot 0 - 3\cdot 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \equiv 1 \\ 1 \equiv 1 \\ -2 \equiv -2 \end{cases}$$

Проверка показала, что найденное решение верное.

Пример. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 2 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ 4x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Запишем систему уравнений в матричной форме

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Система уравнений содержит три неизвестных, значит, для применения формул Крамера нужно вычислить определитель основной матрицы ΔA и три вспомогательных определителя $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 32 - 2 - 12 + 4 - 8 = 20 \neq 0$$

Вспомогательные определители Δ_x, Δ_y, Δ_z составим аналогично предыдущему примеру.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 24 - 2 - 9 + 4 - 8 = 15$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 16 + 4 + 2 - 12 = 5$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 16 + 4 + 24 - 12 - 4 = 10$$

Решение системы находим по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta A}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta A}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta A}$$

$$x = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \quad , \quad y = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad , \quad z = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Ответ $\quad x = \dfrac{3}{4}\ ,\ y = \dfrac{1}{4}\ ,\ z = \dfrac{1}{2}$

Проверка показала, что найденное решение верное.

Метод Гаусса.

Метод Крамера применим только для квадратных систем уравнений (число уравнений равно числу неизвестных), причем определитель основной матрицы должен быть не равен нулю. Если число уравнений не равно числу неизвестных, или определитель системы равен нулю, применяется метод Гаусса. Метод Гаусса – это наиболее эффективный, универсальный метод решения систем линейных алгебраических уравнений любых размерностей.

Алгоритм метода Гаусса.

1. Составить расширенную матрицу $\widetilde{A}$ системы уравнений.
2. С помощью элементарных преобразований строк привести расширенную матрицу к треугольной или трапециевидной форме, то есть ниже главной диагонали сделать все элементы нулевыми.
3. Определить ранг расширенной матрицы $r(\widetilde{A})$ и ранг основной матрицы $r(A)$. *Ранг матрицы* равен количеству ненулевых строк в матрице, приведенной к треугольной форме. Проанализировать полученную треугольную матрицу.

- Если $r(\widetilde{A}) = r(A)$, то система линейных уравнений совместная
- Если $r(\widetilde{A}) \neq r(A)$, то система линейных уравнений несовместная.
- Если $r(A) = n$ (количеству неизвестных), то совместная система линейных уравнений определенная.
- Если $r(A) \neq n$ (количеству неизвестных), то совместная система линейных уравнений неопределенная.

4. В случае, если система линейных уравнений совместная и определенная, то из треугольной матрицы восстановить систему уравнений и найти неизвестные, начиная с последнего уравнения.

5. В случае, если система линейных уравнений совместная и неопределенная, то из треугольной матрицы составить базисный минор, определить базисные неизвестные и свободные неизвестные и только после этого восстановить систему уравнений (ступенчатую) и найти базисные неизвестные, начиная с последнего уравнения. Записать общее решение системы уравнений.

Базисный минор – это определитель, не равный нулю, полученный из треугольной матрицы. Его порядок равен рангу матрицы.

Элементарные преобразования строк матрицы.

1) перестановка строк;

2) вычеркивание нулевой строки (все элементы строки нулевые);

3) прибавление к элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число, кроме нуля.

Замечание. При решении удобно, чтобы коэффициенты, стоящие на главной диагонали были равны 1. Этого можно достигнуть перестановкой уравнений.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса (по алгоритму).

$$\begin{cases} x+3y-4z=2 \\ 2x-y+5z=-2 \\ 4x-2y+z=7 \end{cases}$$

1) Составляем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}\cong$$

2) Приведем расширенную матрицу к трапециевидной форме. Сначала получим нули в первом столбце. Для этого ко 2й строке прибавим элементы 1й строки, умноженные на число (-2). Затем к 3й строке прибавим элементы 1й строки, умноженные на число (-4)

$$\cong\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2+1(-2) & -1+3(-2) & 5-4(-2) & -2+2(-2) \\ 4+1(-4) & -2+3(-4) & 1-4(-4) & 7+2(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 13 & -6 \\ 0 & -14 & 17 & -1 \end{pmatrix}=$$

К 3й строке прибавим элементы 2й строки, умноженные на число (-2)

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 13 & -6 \\ 0+0 & -14-7(-2) & 17+13(-2) & -1-6(-2) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 13 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & 11 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу, приведенную к трапециевидной форме.

3) В это матрице три ненулевых строки. Значит ранг этой матрицы равен 3. Основная матрица также имеет три ненулевых строки. Значит ранг основной матрицы также равен 3. видим, что $r(\widetilde{A}) = r(A) = 3$, следовательно система уравнений совместная. Ранги матриц равны количеству неизвестных системы уравнений $r(A) = n$, следовательно СЛУ определенная.

4) Система уравнений совместная и определенная. Из треугольной матрицы восстановим ступенчатую систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y-4z=2 \\ -7y+13z=-6 \\ \qquad -9z=11 \end{cases}$$

и найдем неизвестные, начиная с последнего уравнения

Из последнего уравнения находим $z=-\dfrac{11}{9}$.

Подставим найденное z во второе уравнение:

$$-7y+13\left(\frac{-11}{9}\right)=-6 \;\Rightarrow -7y-\frac{143}{9}=-6 \;\Rightarrow -7y=\frac{89}{9} \qquad \Rightarrow y=-\frac{89}{63}.$$

Найденные y и z подставим в первое уравнение:

$$x+3\left(-\frac{89}{63}\right)-4\left(-\frac{11}{9}\right)=2 \;\Rightarrow x-\frac{89}{21}+\frac{44}{9}=2 \qquad \Rightarrow x=\frac{85}{63}$$

Запишем ответ: $x=\dfrac{85}{63}$; $y=-\dfrac{89}{63}$; $z=-\dfrac{11}{9}$.

Выполним проверку. Для этого подставим найденные значения неизвестных в исходную систему уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{85}{63}+3\left(-\dfrac{89}{63}\right)-4\left(-\dfrac{11}{9}\right)=\dfrac{85}{63}-\dfrac{3\cdot 89}{63}+\dfrac{4\cdot 11\cdot 7}{63}=2 \\ 2\cdot\dfrac{85}{63}-\left(-\dfrac{89}{63}\right)+5\left(-\dfrac{11}{9}\right)=\dfrac{2\cdot 85}{63}+\dfrac{89}{63}-\dfrac{5\cdot 11\cdot 7}{63}=-2 \\ 4\cdot\dfrac{85}{63}-2\left(-\dfrac{89}{63}\right)-\dfrac{11}{9}=\dfrac{4\cdot 85}{63}+\dfrac{2\cdot 89}{63}-\dfrac{11\cdot 7}{63}=7 \end{cases}$$

Проверка показала, что найденное решение верное.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса. .

$$\begin{cases} x-2y+z+2u=1 \\ 3x-5y+4z+6u=9 \\ x-y+5z-u=7 \\ 4x-8y+4z+9u=9 \end{cases}.$$

1) Составим расширенную матрицу системы уравнений.

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 7 \\ 4 & -8 & 4 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \textit{сначала получим нули в первом столбце} \\ \textit{ведущий элемент } a_{11}=1.\ \textit{1ю строку умножаем} \\ \textit{на } -3 \textit{ и прибавляем ко второй строке} \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 7 \\ 4 & -8 & 4 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \textit{ведущий элемент } a_{11}=1.\ \textit{1ю строку умножаем} \\ \textit{на } -1 \textit{ и прибавляем к третьей строке} \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 6 \\ 4 & -8 & 4 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \textit{ведущий элемент } a_{11}=1.\ \textit{1ю строку умножаем} \\ \textit{на } -4 \textit{ и прибавляем к четвертой строке} \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \textit{теперь получим нули во втором столбце} \\ \textit{ведущий элемент } a_{22}=1.\ \textit{2ю строку умножаем} \\ \textit{на } -1 \textit{ и прибавляем к третьей строке} \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \textit{по алгоритму следует третий шаг с ведущим} \\ \textit{элементом } a_{33}=3, \textit{ но под ним уже имеется ноль.} \\ \textit{Матрица приведена к треугольному виду.} \end{pmatrix}$$

По полученной матрице восстанавливаем систему и находим неизвестные, начиная с последнего уравнения:

$$\begin{cases} x-2y+z+2u=1 \\ y+z=6 \\ 3z-3u=0 \\ u=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z+2\cdot 5=1 \\ y+z=6 \\ 3z-3\cdot 5=0 \\ u=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+5+2\cdot 5=1 \\ y+5=6 \\ z=5 \\ u=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2\cdot 1 + 5 + 2\cdot 5 = 1 \\ y = 1 \\ z = 5 \\ u = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = 1 \\ z = 5 \\ u = 5 \end{cases}$$

Ответ: $x = -12, \quad y = 1, \quad z = 5, \quad u = 5.$

Проверка.

$$\begin{cases} -12 - 2\cdot 1 + 5 + 2\cdot 5 = -12 - 2 + 5 + 10 = 1 \\ 3(-12) - 5\cdot 1 + 4\cdot 5 + 6\cdot 5 = -36 - 5 + 20 + 30 = 9 \\ -12 - 1 + 5\cdot 5 - 5 = -12 - 1 + 25 - 5 = 7 \\ 4(-12) - 8\cdot 1 + 4\cdot 5 + 9\cdot 5 = -48 - 8 + 20 + 45 = 9 \end{cases}$$

Проверка показала, что найденное решение верное.

1.4. Векторы

Скалярные и векторные величины. Вектор, модуль вектора, единичный вектор, коллинеарные, компланарные векторы. Ортонормированный базис пространства. Разложение вектора в базисе. Проекция вектора на ось, координаты, направляющие косинусы вектора. Умножение вектора на число. Сложение и вычитание векторов. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов. Деление отрезка в заданном отношении.

Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются *скалярными*. Например, площадь, длина, объем, масса, работа, температура, мощность, расстояние. Другие величины, такие как сила, скорость, ускорение, перемещение, вес, кроме своего числового значения определяются еще и направлением. Такие величины называются *векторными*. Чтобы изучать различные векторные величины с единой точки зрения в математике вводится понятие вектора.

Вектор – это направленный отрезок.

Обозначения вектора: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$.

Модуль (или длина) вектора – это расстояние от начальной до конечной точки вектора.

Единичный вектор (или орт-вектор) некоторой оси – это вектор, длина которого равна единице и направление совпадает с направлением оси.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или параллельных прямых.

Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной или в параллельных плоскостях.

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат (ДПСК) в пространстве (рис. 3).

Единичный вектор координатной оси OX обозначим $\vec{i}$. Единичный вектор координатной оси OY обозначим $\vec{j}$. Единичный вектор координатной оси OZ обозначим $\vec{k}$. Координатные оси взаимоперпендикулярны, $OX \perp OY \perp OZ$. Таким образом, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

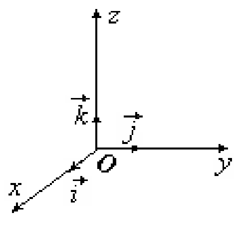


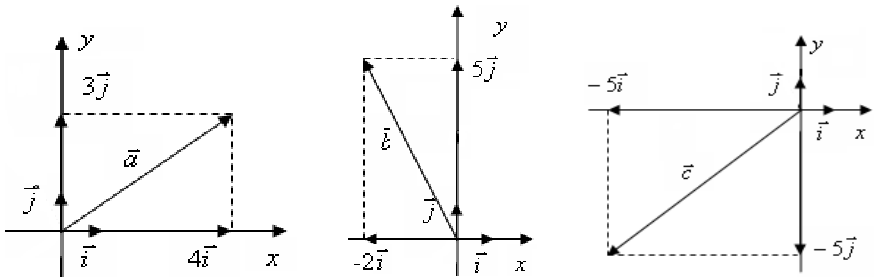
Рис. 3

и $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$. Говорят, что векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют ортонормированный базис в пространстве.

Любой вектор $\vec{a}$ можно выразить через векторы $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ в пространстве, то есть представить вектор в виде

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j} + \gamma \cdot \vec{k}$$

Это представление называется разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Числа (α, β, γ) называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. На рисунке 4 приведены примеры.



$\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{b} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{c} = -5\vec{i} - 5\vec{j}$

Рис. 4

Проекция вектора на ось – это длина отрезка, заключенного между проекциями на эту ось начальной и конечной точек вектора.

Координаты вектора на плоскости – это пара чисел – проекций этого вектора на координатные оси.

Координаты вектора в пространстве – это тройка чисел проекций вектора на координатные оси.

Обозначение: $\vec{a} = \{x_{\vec{a}};\ y_{\vec{a}};\ z_{\vec{a}}\}$ - вектор $\vec{a}$ с координатами.

Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конечной точки вычесть координаты начальной точки.

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$$

Модуль (или длина) вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

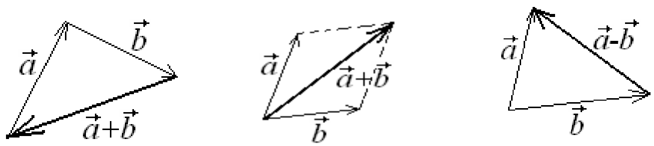
Направляющие косинусы вектора– это косинусы углов, которые вектор составляет с координатными осями.

$$\cos\alpha = \frac{x_{\vec{a}}}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{y_{\vec{a}}}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z_{\vec{a}}}{|\vec{a}|}$$

Связь направляющих косинусов одного вектора	$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
Координаты орт-вектора	$\vec{a}^0 = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$
Умножение вектора на число	$\lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda \cdot x; \lambda \cdot y; \lambda \cdot z\}$
Сложение (вычитание) векторов	$\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_a \pm x_b; y_a \pm y_b; z_a \pm z_b\}$

Графическое сложение векторов проводится по правилу треугольника или по правилу параллелограмма. (Рис. 5, а), б)

Графическое вычитание векторов проводится по правилу треугольника. (Рис. 5, в)



а) б) в)

Рис.5

Пример. Найти расстояние между точкой $A(2,-3,5)$ и точкой $B(4,-4,2)$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = (4-2,\ -4+3,\ 2-5)$, значит, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{i} - 3\vec{k}$

Находим длину этого вектора:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$. *Ответ*: $\sqrt{14}$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

Если векторы заданы в координатах $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, то их скалярное произведение находят по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Скалярное произведение позволяет находить:

1) угол между векторами по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

2) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ по формуле $pr_{\vec{b}}\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$

3) Проверять, будут ли векторы перпендикулярны, так как скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

4) Находить работу, производимую некоторой силой, так как *физический смысл* скалярного произведения векторов: «Работа силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки вдоль контура $\vec{S}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения». $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$

Пример. Проверить, будут ли перпендикулярны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Решение. Координаты вектора $\vec{a} = \{3;\ 4;\ -5\}$ и координаты вектора $\vec{b} = \{-3;1;\ -1\}$. Для проверки перпендикулярности надо найти скалярное произведение этих векторов.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 + (-5) \cdot (-1) = -9 + 4 + 5 = 0$. Значит, $\vec{a} \perp \vec{b}$

Пример. В треугольнике ABC найти периметр, косинус угла при вершине B и проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$. Треугольник задан вершинами $A(2,5,-3)$, $B(3,-4,1)$, $C(-1,6,3)$.

Решение. 1) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$.
Из координат точки *A* вычитаем координаты точки *B*. Получаем координаты вектора $\overrightarrow{BA} = (-1,9,-4)$. Из координат точки *C* вычитаем координаты точки *B*. Получаем координаты вектора $\overrightarrow{BC} = (-4,10,2)$. Из координат точки *C* вычитаем координаты точки *A*. Получаем координаты вектора $\overrightarrow{AC} = (-3,1,6)$.

Находим модули векторов: $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1+81+16} = \sqrt{98}$,

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{16+100+4} = \sqrt{120}$, $\quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9+1+36} = \sqrt{46}$.

Значит, периметр треугольника равен $P = \sqrt{98} + \sqrt{120} + \sqrt{46}$.

2) Найдем угол при вершине B:

$$\cos\angle B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{4+90-8}{\sqrt{1+81+16} \cdot \sqrt{16+100+4}} = \frac{86}{\sqrt{98} \cdot \sqrt{120}}$$

3) Найдем проекцию:

$$pr_{AB}\,\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(1,-9,4) \cdot (-3,1,6)}{\sqrt{1+81+16}} = \frac{-3-9+24}{\sqrt{98}} = \frac{12}{\sqrt{98}}$$

Пример. Даны две точки с координатами $A(2;3;1)$, $C(-3;0;5)$ и вектор силы $\vec{F}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$. Найти работу силы по перемещению материальной точки вдоль контура AC.

Решение. Координаты вектора $\vec{F}=\{2;\ 3;\ -4\}$.

Координаты вектора $\overrightarrow{AC}=\{-3-2\ ;\ \ 0-3\ ;\ \ 5-1\}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\{-5\ ;\ -3\ ;\ \ 4\}$.

Работа силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AC}=2(-5)+3(-3)+(-4)4=-10-9-16=-35$ *Ответ*. -35

Три некомпланарных вектора называются *упорядоченными,* если известно, какой из них первый, какой второй, какой третий.

Тройка векторов называется *правой*, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму, наблюдаемый со стороны третьего вектора, совершается против часовой стрелки. *Левая* тройка векторов – поворот совершается по ходу часовой стрелки. (Рис. 6)

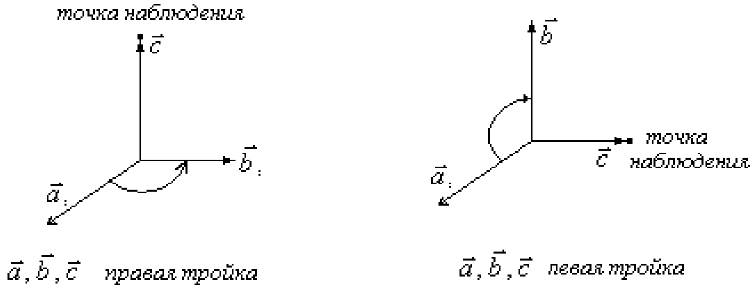


Рис. 6

Векторным произведением векторов $\vec{a}\times\vec{b}$ называется такой третий вектор $\vec{c}$, для которого выполняются три условия:

1) $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$ - этот вектор перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

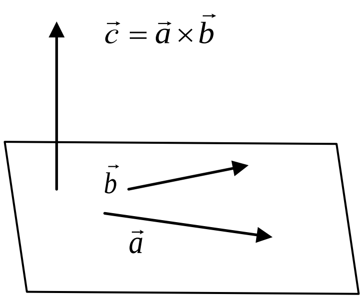
2) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$ - модуль этого вектора равен произведению модуля вектора $\vec{a}$ на модуль вектора $\vec{b}$ и на синус угла между ними;

3) векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку.

Замечание. Необходимо понимать различия скалярного и векторного произведения. Векторное произведение обозначается крестиком $\vec{a}\times\vec{b}$. Скалярное произведение обозначается точкой $\vec{a}\cdot\vec{b}$. В результате векторного произведения получается третий вектор $\vec{c}$. В результате скалярного произведения получается число. Формулы для вычисления скалярного и векторного произведений различные.

С помощью векторного произведения можно находить:

1) Вектор, перпендикулярный плоскости, которая проходит параллельно двум данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рисунок). Или вектор, перпендикулярный двум другим векторам.



2) Площадь параллелограмма и треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах:

$$S_{параллелограмма} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$$

$$S_{треугольника} = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$$

Формула для вычисления координат векторного произведения

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Пример. Найти координаты векторного произведения векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 13\vec{j} - 20\vec{k}$$

Определитель вычислен методом разложения по элементам первой строки. Проверим вычисления. Так как $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$, то надо убедиться, что скалярные произведения равны нулю:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (-4,-13,-20) \cdot (2,4,-3) = -8 - 52 + 60 = 0$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = (-4,-13,-20) \cdot (3,-4,2) = -12 + 52 - 40 = 0.$$

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2,3,1), B(-3,6,1), C(0,2,4)$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA} = (5,-3,0)$, $\overrightarrow{BC} = (3,-4,3)$.

Затем находим их векторное произведение:

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 15\vec{j} - 11\vec{k}$$

Проверим вычисления: $\left(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right) \perp \overrightarrow{BA} \Rightarrow 5 \cdot (-9) - 3 \cdot (-15) + 0 = 0$ ска-

лярное произведение равно нулю, значит векторы перпендикулярны.
Аналогично, $\left(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right)\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow 3\cdot(-9)-4\cdot(-15)+3\cdot(-11)=-27+60-33=0$
Находим площадь треугольника:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{81+225+121}=\frac{\sqrt{427}}{2}.$$

Пример. Найти вектор $\vec{N}$, перпендикулярный вектору $\vec{c}=(2,3,1)$ и вектору $\vec{d}=(3,2,5)$.

$$\vec{N}=\vec{c}\times\vec{d}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=13\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k}$$

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2,4,3), B(-3,-4,2), C(0,2,5)$.

Находим координаты векторов, на которых построен этот треугольник: $\overrightarrow{AB}=(-3-2,\ -4-4,\ 2-3)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{AB}=(-5,\ -8,\ -1)$

$\overrightarrow{AC}=(0-2,\ 2-4,\ 5-3)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{AC}=(-2,\ -2,\ 2)$

Затем находим координаты векторного произведения этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & -8 & -1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-8 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-5 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-5 & -8\\ -2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=-18\vec{i}+12\vec{j}-6\vec{k}$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{324+144+36}=\frac{\sqrt{504}}{2}.$$

Ответ: $S=\dfrac{\sqrt{504}}{2}$

Смешанным произведением векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется их векторно-скалярное произведение

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

Смешанное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

С помощью смешанного произведения можно находить:

1) Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V = \left| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right|$$

2) Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right|$$

3) Определять ориентированнойсть тройки векторов:

если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0 \Leftrightarrow$ тройка левая; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0 \Leftrightarrow$ тройка правая;

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow$ тройка компланарная

Пример Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2,3,1),\quad B(0,2,1),\quad C(-2,1,0),\quad D(2,1,2).$

Решение. Найдем координаты трех векторов, выходящих из общей вершины тетраэдра: $\overrightarrow{AB} = \{0-2;\ 2-3;\ 1-1\} = \{-2,-1,0\}$,

$\overrightarrow{AC} = \{-2-2;\ 1-3;\ 0-1\} = \{-4,-2,-1\}$, $\quad \overrightarrow{AD} = \{0,-2,1\}$

Находим смешанное произведение векторов

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 4 = 4 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \ \textit{Ответ}\ V = \frac{2}{3}$$

Пример. Найти объем тетраэдра *ABCD* с вершинами $A(2,3,2),\quad B(-2,0,2),\quad C(3,4,5),\quad D(2,1,3)$ и найти длину его высоты, проведенной из вершины *D*.

Решение. Находим объем пирамиды как в предыдущем примере:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 3 - 24 = -25 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{25}{6}$$

С другой стороны, объем пирамиды можно найти по формуле $V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H$. Выразим отсюда искомую высоту тетраэдра: $H = \frac{3 \cdot V}{S_{осн}}$. Объем уже известен, а площадь треугольника *ABC* найдем с помощью векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB} = (-4,-3,0)$, $\quad \overrightarrow{AC} = (1,1,3)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=-9\vec{i}+12\vec{j}-\vec{k}\quad\Rightarrow\quad S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{81+144+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{226}}{2}$$

$$\Rightarrow\quad H=\frac{3\cdot 25\cdot 2}{6\cdot\sqrt{226}}\qquad\qquad \textit{Ответ}\ H=\frac{25}{\sqrt{226}}$$

Деление отрезка в заданном отношении.

Пусть дан отрезок *AB*. Точка *M* делит отрезок в отношении $\frac{AM}{MB}=\lambda$ (считая от точки *A*). Тогда координаты точки *M* находят по формулам:

$$x_M=\frac{x_A+\lambda\cdot x_B}{1+\lambda}\qquad y_M=\frac{y_A+\lambda\cdot y_B}{1+\lambda}\qquad z_M=\frac{z_A+\lambda\cdot z_B}{1+\lambda}$$

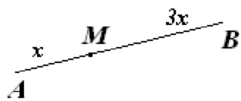
Пример. Дан отрезок *AB*. $A(2,3,8)$, $B(4,1,-3)$

Найти координаты точки *M,* которая отсекает четвертую часть отрезка *AB*, считая от точки *A*.

Решение. Найдем число λ. Весь отрезок *AB* составляет 4 части, то есть $x+3x=4x$. тогда *AM* составляет одну четвертую часть от всего отрезка *AB*, то есть $AM=x$.

MB составляет три четвертых части отрезка *AB*, то есть $MB=3x$.

$$\frac{AM}{MB}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}=\lambda$$



$$x_M=\frac{2+\frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}}=\frac{5}{2},\qquad y_M=\frac{3+\frac{1}{3}\cdot 1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{5}{2},$$

$$z_M=\frac{8+\frac{1}{3}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{21}{4}\qquad\qquad \textit{Ответ.}\ M\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{21}{4}\right).$$

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. Функция

Понятие о функции, область определения, график. Возрастающая, убывающая, монотонная функция. Точки максимума, минимума. Четная, нечетная, сложная функция. Основные элементарные функции и их графики.

Функцией $y = f(x)$ называется соответствие каждому значению независимой переменной x единственного значения зависимой переменной y. Независимую переменную еще называют *аргументом функции*.

Область определения функции – это множество всех значений аргумента, для которых функция имеет смысл.

Например, функция $y = x^2 + 4$ имеет смысл при любых значениях аргумента (переменной x). Областью определения этой функции является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Функция $y = \dfrac{1}{x}$ имеет смысл при всех значениях аргумента кроме 0 (на ноль делить нельзя!). Поэтому область определения этой функции $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Функция $y = \sqrt{x}$ имеет смысл только для неотрицательных значений аргумента. Область определения этой функции $x \in [0; +\infty)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется линия на плоскости xOy, проходящая через точки с координатами $(x;\ f(x))$.

Функция называется *возрастающей,* если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется *убывающей,* если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Функция называется *монотонной на интервале* $(a; b)$, если она на этом интервале либо только убывает, либо только возрастает. А само возрастание или убывание называется характером монотонности.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции, если для всех значений аргумента, близких к x_0, значения функции будут меньше, чем в самой точке x_0. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции, если для всех значений аргумента, близких к x_0, значения функции будут больше, чем в самой точке x_0.

Максимумом функции называется значение функции в точке максимума. *Минимумом функции* называется значение функции в точке минимума.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для всех значений аргумента из области определения выполняется условие

$$f(-x) = f(x)$$

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для всех значений аргумента из области определения выполняется условие

$$f(-x) = -f(x)$$

График четной функции симметричен относительно оси Oy. Нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пусть определены функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Функция вида $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией* от аргумента x (или суперпозицией заданных функций, или функцией от функции). Переменную $u = \varphi(x)$ называют промежуточным аргументом сложной функции.

Например, функция $y = \cos(\ln x)$ сложная, представляет собой суперпозицию функций $y = \cos(u)$ и $u = \ln(x)$.

Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов. Например $y = \arcsin\sqrt{\cos(\ln x)}$.

Основные элементарные функции и их графики.

К основным элементарным функциям относятся степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические функции.

Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$; $a \neq 1$. Графики показательных функций с различными основаниями на рис. 7.

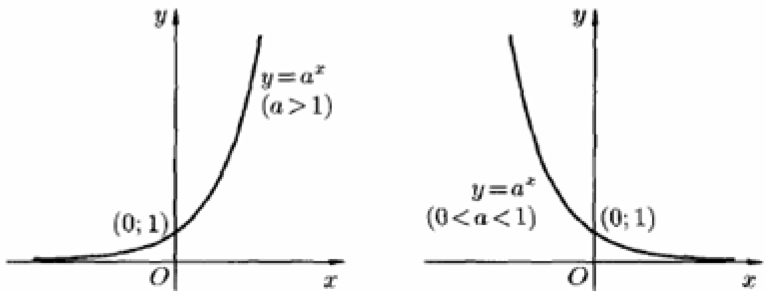


Рис. 7

Степенная функция $y = x^{\alpha}$, где α - любое число. Графики степенных функций с различными показателями степени на рис. 8.

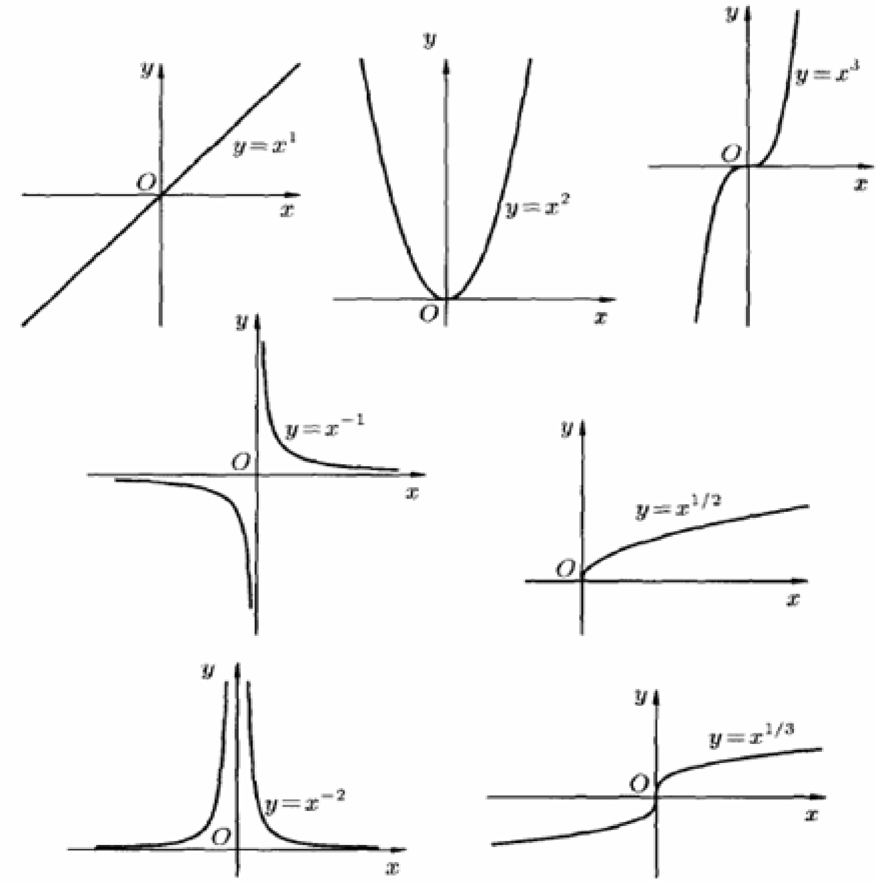


Рис. 8

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$; $a \neq 1$. Графики логарифмических функций с различными основаниями на рис. 9.

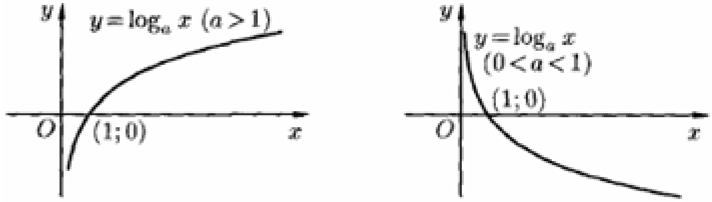


Рис. 9

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$. Графики показаны на рисунке 10.

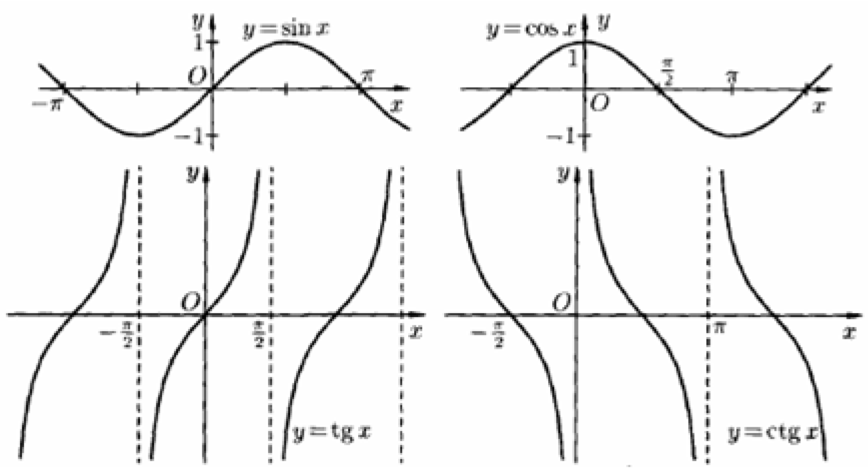


Рис. 10

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$. Графики показаны на рисунке 11.

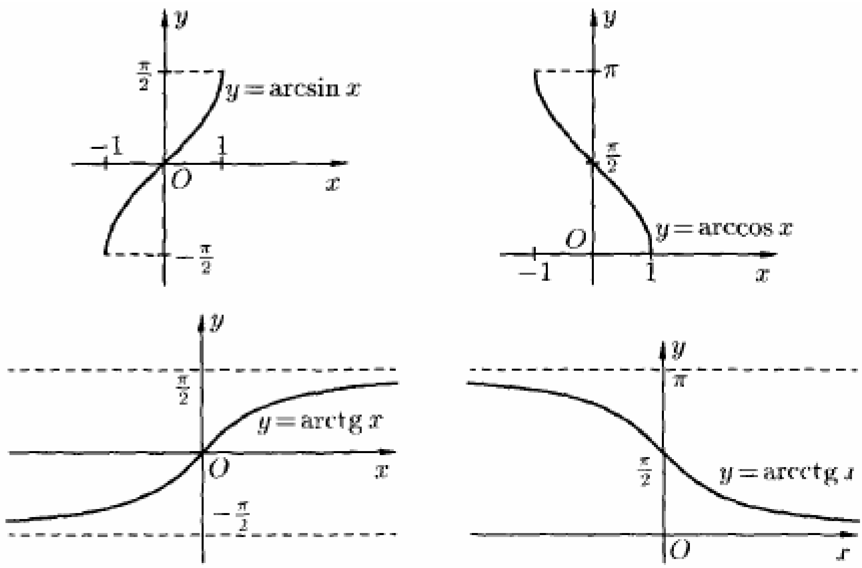


Рис. 11

2.2. Предел функции

Определение. Ббф и бмф. Безусловные операции над ббф, бмф и ограниченными величинами. Связь между ббф, бмф и ограниченными величинами. Неопределенности. Основные теоремы о пределах. Вычисление предела. Правила раскрытия неопределенностей.

Число А называется *пределом функции y=f(x)* в точке x_0, если для любого, сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое число δ(ε)>0, что из условия $0<|x - x_0|<\delta(\varepsilon)$ (Рис. 12) следует $0<|f(x) - A| <\varepsilon$.

Другими словами, если при неограниченном приближении аргумента x к некоторой точке x_0 соответствующие значения функции неограниченно близко приближаются к числу A, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет предел и обозначают этот факт следующим образом:

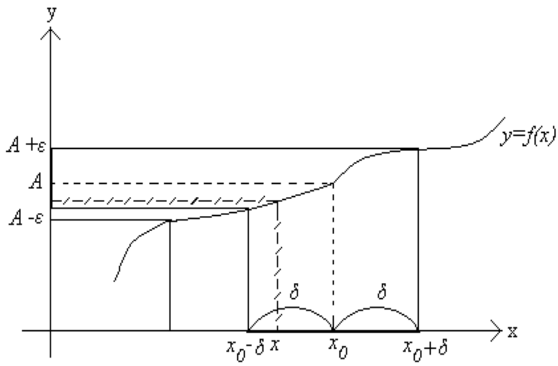


Рис. 12

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Функция *y=f(x)* называется *ограниченной* на интервале (x_1, x_2), если существует число К такое, что для любых значений аргумента из этого интервала выполняется условие $|f(x)|< |K|$.

На рисунке 13 функция *y=f(x)* ограничена на интервале (x_1, x_2).

Функция *y=f(x)* называется *бесконечно малой* в окрестности точки x_0, если для любого, сколь угодно малого положительного числа ε существует такое число δ(ε)>0, что для любых значений аргумента из δ-окрестности этой точки выполняется условие $|f(x)|< \varepsilon$.

Другими словами, функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой (б.м.), если ее предел в точке равен нулю: $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

На рис.13 в точках x_1, x_2 x_4 функция *y=f(x)* - бесконечно малая.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке x_0, если для любого, сколь угодно большого по абсолютной величине числа M найдется такое $б$(M), что из условия $0 < |x - a| < б$

следует условие $|f(x)| > |M|$.

Другими словами, функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой (б.б.) в точке x_0, если предел этой функции в данной точке равен бесконечности: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Геометрический образ бесконечно большой представлен на рисунке 13. Здесь в точке x_3 функция слева является отрицательной бесконечно большой, а справа – положительной бесконечно большой.

Договоримся обозначать любую ограниченную функцию символом С. Любую бесконечно малую функцию символом (о), любую бесконечно большую функцию символом (∞).

ОСТОРОЖНО!!! С символами нельзя обращаться как с обыкновенными числами.

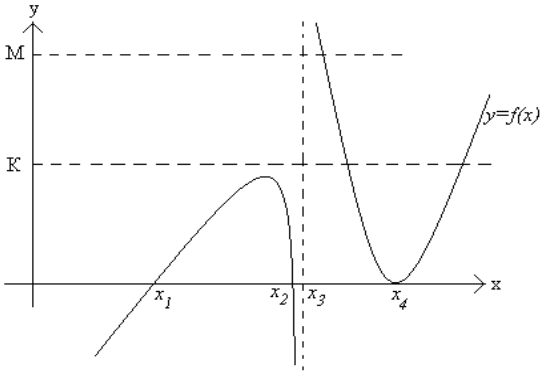


Рис. 13

Безусловные операции над бесконечно малыми и ограниченными величинами:

$$\mathbf{(o) + (o) = (o); \qquad (o)\cdot(o) = (o); \qquad C\cdot(o) = (o);}$$

$$\mathbf{(o) + C = C}; \qquad \frac{(\text{o})}{\text{C}} = (\text{o}).$$

Говорят, бесконечно малая плюс бесконечно малая есть бесконечно малая; бесконечно малая умножить на бесконечно малую равно бесконечно малая; ограниченную умножить на бесконечно малую равно бесконечно малая; и т.д.

Безусловные операции над бесконечно большими и ограниченными величинами:

$$\frac{\infty}{C} = \infty, \qquad \infty + C = \infty, \qquad \infty \cdot C = \infty, \qquad \sqrt[n]{\infty} = \infty.$$

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty,$$

Говорят, бесконечно большая разделить на ограниченную равно бесконечно большая; бесконечно большая плюс бесконечно большая равно бесконечно большая; и т.д.

Связь между бесконечно большими, бесконечно малыми и ограниченными величинами:

$$\frac{C}{\infty}=(o), \quad \frac{C}{(o)}=\infty, \quad \frac{\infty}{(o)}=\infty, \quad \frac{(o)}{\infty}=(o).$$

$$C^{\infty}=\infty, \text{ если } C>1, \qquad C^{\infty}=(o), \text{ если } 0<C<1$$

$$\infty^{C}=\infty, \text{ если } C>0, \qquad \infty^{C}=(o), \text{ если } C<0.$$

Но кроме рассмотренных соотношений могут появиться такие, для которых результат неочевиден. Они называются неопределенными выражениями или *неопределенностями.*

Различают семь видов неопределенностей:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty-\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad 0\cdot\infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^{\infty}, \quad \infty^{0}.$$

Основные теоремы о пределах

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$ - предел постоянной равен самой этой постоянной.
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$ - предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов этих функций.
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$ - предел произведения функций равен произведению пределов этих функций.
4. $\lim\limits_{x\to a} k\cdot f(x)=k\lim\limits_{x\to a} f(x)$ - постоянный множитель можно вынести за знак предела.
5. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ - предел отношения (частного) двух функций равен отношению (частному) пределов этих функций.

А если функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны, то для них верны следующие свойства (знак функции можно вынести за знак предела и в первую очередь выполнить действие в скобках):

6. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(\lim\limits_{x\to a} x)$. Например, $\lim\limits_{x\to a}(\sin x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} x)$.
7. $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to a} g(x))$. Например $\lim\limits_{x\to a}(\sin e^{x})=\sin(\lim\limits_{x\to a} e^{x})$.
8. $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{k}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{k}$ Например $\lim\limits_{x\to a}(\sin x)^{14}=\left(\lim\limits_{x\to a}\sin x\right)^{14}$
9. $\lim\limits_{x\to a} k^{f(x)}=k^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$. Например $\lim\limits_{x\to a} 8^{\sin x}=8^{\lim\limits_{x\to a}\sin x}$

Последовательность действий для вычисления предела

Пусть требуется найти предел функции. Для этого нужно:

1. Подставить предельное значение аргумента a под знак предела (вместо x подставить a – числовое значение, к которому стремится аргумент).

2. Если $f(a)$ - вполне определенное выражение (конечное число или бесконечность), то предел найден.

3. Если $f(a)$ представляет одно из неопределенных выражений, от такой неопределенности нужно избавиться (говорят – необходимо раскрыть неопределенность).

Как раскрыть неопределенность? Для этого существуют различные приемы. Рассмотрим их подробно в следующих пунктах.

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2-3}=\left|\text{подставим вместо } x \text{ число } 2\right|=\frac{2+3}{4-3}=5.$$

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{\sqrt{x}+5}=\left|\text{подставим вместо } x \text{ число } 0\right|=\frac{0-3}{0+5}=-\frac{3}{5}.$$

Пример 3. Вычислить предел, используя связь между бесконечно большими, бесконечно малыми и ограниченными величинами.

$$\lim_{x\to 5}\frac{2}{x-5}=\left|\text{подставим вместо } x \text{ число } 5\right|=\frac{2}{0}=\infty\text{, т. к. }\quad\frac{C}{(o)}=\infty\ .$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-6x+3}=\left|\begin{matrix}\text{подставим вместо } x\\ \text{бесконечно большое число}\end{matrix}\right|=\frac{2}{\infty}=0\text{, т. к. }\quad\frac{C}{\infty}=(o).$$

2.3. Раскрытие неопределенностей

ПРАВИЛО *для раскрытия неопределенности* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

- если старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя, то предел равен ∞;
- если старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя, то предел равен 0;
- если старшая степень числителя равна старшей степени знаменателя, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях.

В общем случае для раскрытия этого вида неопределенности нужно в числителе и знаменателе вынести за скобки наиболее быстро возрастающую функцию, сократить дробь и проанализировать результат.

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x}{x^2+3x+3}=\left|\begin{matrix}\text{подставим вместо } x\\ \text{бесконечно большое число}\end{matrix}\right|=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{старшая степень числителя } x^3 \text{ больше}\\ \text{старшей степени знаменателя } x^2\end{matrix}\right|=\infty$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{x^4+3x^3+3}=\left|\begin{matrix}\text{подставим вместо } x\\ \text{бесконечно большое число}\end{matrix}\right|=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{степень числителя } x^2 \text{ меньше}\\ \text{степени знаменателя } x^4\end{matrix}\right|=0$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2}{5x^3+3}=\left|\begin{matrix}\text{подставим вместо } x\\ \text{бесконечно большое число}\end{matrix}\right|=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{степень числителя равна степени знаменателя,}\\ \text{коэффициенты при старших степенях } 2 \text{ и } 5\end{matrix}\right|=\frac{2}{5}.$$

Пример 8.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt{x(3x^3+2)}}{5x^3+3}=\left|\begin{matrix}\text{подставим вместо } x\\ \text{бесконечно большое число}\end{matrix}\right|=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{наибольшая степень числителя } x^1\cdot x^{1/2}\cdot x^{3/2}=x^3\\ \text{равна степени знаменателя}\\ \text{коэффициенты при старших степенях } \sqrt{3} \text{ и } 5\end{matrix}\right|=\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Пример 9.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^7+2x^5-10}{5x^2+3x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^7\left(7+\frac{2}{x^2}-\frac{10}{x^7}\right)}{x^2\left(5+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=\left|\begin{array}{l}\frac{2}{x^2}=\frac{2}{\infty}=0\\ \frac{10}{x^7}=\frac{10}{\infty}=0\\ \frac{3}{x}=\frac{3}{\infty}=0\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^7}{5x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^5}{5}=\frac{\infty}{5}=\infty$$

Пример 10.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^7+2x^5-10}{5x^8+2x^5+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^7\left(7+\frac{2}{x^2}-\frac{10}{x^7}\right)}{x^8\left(5+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^8}\right)}=\left|\text{как в примере9}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^7}{5x^8}=\lim_{x\to\infty}\frac{7}{5x}=\frac{7}{\infty}=0$$

Пример 11.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^8+2x^6-10}{2x^5+5x^8+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^8(7+\frac{2}{x^2}-\frac{10}{x^8})}{x^8(\frac{2}{x^3}+5+\frac{4}{x^8})}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^8}{5x^8}=\frac{7}{5}$$

Каждый из этих примеров легко можно решить по **ПРАВИЛУ**, сформулированному выше.

Пример 12.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^2+5}+\sqrt[4]{16x^8-2x+7}}{\sqrt[5]{32x^{10}-4x+5}+\sqrt[3]{27x^6-8}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}+\sqrt[4]{x^8\left(16-\frac{2x}{x^8}+\frac{7}{x^8}\right)}}{\sqrt[5]{x^{10}\left(32-\frac{4x}{x^{10}}+\frac{5}{x^{10}}\right)}+\sqrt[3]{x^6\left(27-\frac{8}{x^6}\right)}}=\left|\begin{array}{l}\frac{5}{x^2}=0;\quad \frac{7}{x^8}=0\\ \frac{2x}{x^8}=\frac{2}{x^7}=\frac{2}{\infty}=0\\ \frac{4x}{x^{10}}=\frac{4}{x^9}=\frac{4}{\infty}=0\end{array}\right|=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^2(1+0)} + \sqrt[4]{x^8(16-0+0)}}{\sqrt[5]{x^{10}(32-0+0)} + \sqrt[3]{x^6(27-0)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[4]{16x^8}}{\sqrt[5]{32x^{10}} + \sqrt[3]{27x^6}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2/5} + 2x^2}{2x^2 + 3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2/5} + 2x^2}{5x^2} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \textit{старшие степени числителя и знаменателя } x^2 \\ \textit{– одинаковые, значит предел равен отношению} \\ \textit{коэффициентов при старших степенях} \end{matrix} \right| = \frac{2}{5}$$

ПРАВИЛО *для раскрытия неопределенности* $(\infty - \infty)$

Необходимо преобразовать выражение так, чтобы получилась неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. И далее использовать правило для $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 13. Вычислить предел функции.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - x}{x+5} - \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 3}\right) = (\infty - \infty) = \left| \begin{matrix} \textit{приведем дроби к} \\ \textit{общему знаменателю} \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2 - x)(x^2 - 3) - (x^3 + 2x)(x+5)}{(x+5)(x^2 - 3)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-6x^3 - 5x^2 - 4x - 2}{(x+5)(x^2 - 3)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -6$$

Пример 14. Вычислить предел функции. Два выражения вида $(a+b)$ *и* $(a-b)$ называют сопряженными выражениями.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 - 5x + 3} - \sqrt{x^2 - 9x - 8}\right) \cong \left| \begin{matrix} \textit{домножим числитель и знаменатель} \\ \textit{дроби на сопряженное выражение} \end{matrix} \right| \cong$$

$$\cong \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 3} - \sqrt{x^2 - 9x - 8}) \cdot (\sqrt{x^2 - 5x + 3} + \sqrt{x^2 - 9x - 8})}{(\sqrt{x^2 - 5x + 3} + \sqrt{x^2 - 9x - 8})} \cong$$

$$\cong \left| \begin{matrix} \text{числитель преобразуем по формуле} \\ \text{(a - b)(a + b) = a}^2 - b^2 \end{matrix} \right| \cong \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 5x + 3 - (x^2 - 9x - 8)}{(\sqrt{x^2 - 5x + 3} + \sqrt{x^2 - 9x - 8})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x+11}{(\sqrt{x^2-5x+3}+\sqrt{x^2-9x-8})} = \frac{\infty}{\infty} \cong \left| \begin{matrix} \textit{по правилу: выносим наибольшую} \\ \textit{степень за скобки} \end{matrix} \right| \cong$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(4+\frac{11}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{5x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{9x}{x^2}-\frac{8}{x^2}\right)}} \cong \left| \begin{matrix} \frac{11}{x}=\frac{11}{\infty}=0 \quad \frac{3}{x^2}=\frac{3}{\infty}=0 \\ \frac{5x}{x^2}=\frac{5}{x}=\frac{5}{\infty}=0 \ \ \textit{и т.д.} \end{matrix} \right| \cong$$

$$\cong \lim_{x\to\infty} \frac{x(4+0)}{\sqrt{x^2(1-0+0)}+\sqrt{x^2(1-0-0)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

ПРАВИЛО *для раскрытия неопределенности* $\left(\frac{0}{0}\right)$

Для раскрытия этого вида неопределенности существует несколько стандартных приемов. Основное правило состоит в том, что в числителе и знаменателе необходимо выделить сомножители, обращающие выражение в ноль (как правило, это выражение вида $x - x_0$) и сократить.

Пример 15. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{3x^2+2x-33} = \left| \begin{matrix} \textit{подставим вместо} \\ x \ \textit{число } 3 \end{matrix} \right| = \left(\frac{0}{0}\right) =$

Для раскрытия неопределенности по правилу необходимо в числителе и знаменателе найти сомножитель $x-3$ и сократить.

Применим формулу разложения квадратного трехчлена на множители

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Корни числителя: $x_1 = 3$ *и* $x_2 = 2$.

Тогда $\quad x^2-5x+6=(x-3)\cdot(x-2)$

Корни знаменателя: $x_1 = 3$ *и* $x_2 = \frac{11}{3}$.

Тогда $\quad 3x^2+2x-33=3(x-3)\cdot(x-\frac{11}{3})$

Преобразуем числитель и знаменатель в пределе:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\cdot(x-2)}{3(x-3)\cdot(x-\frac{11}{3})} = \left| \begin{matrix} \textit{сократим} \\ \textit{дробь} \end{matrix} \right| \cong \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{3\left(x-\frac{11}{3}\right)} = \left| \begin{matrix} \textit{подставим вместо} \\ x \ \textit{число } 3 \end{matrix} \right| = \frac{1}{20}.$$

Пример 16.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+4x-21}{x^2-8x+15}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

найдем корни числителя, корни знаменателя и разложим на множители:

$$\left(\begin{array}{lll} x^2+4x-21=0 & \begin{cases} x_1+x_2=-4 \\ x_1\cdot x_2=-21 \end{cases} & x_1=3 \quad x_2=-7 \\ & & \\ x^2-8x+15=0 & \begin{cases} x_1+x_2=8 \\ x_1\cdot x_2=15 \end{cases} & x_1=3 \quad x_2=5 \end{array}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+7)}{(x-3)(x-5)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+7}{x-5}=\frac{3+7}{3-5}=-5$$

Пример 17. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-8x-85}{x^4-3x^3+x^2-10x-225}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$

По правилу необходимо в числителе и знаменателе выделить сомножитель $x-5$. Для этого, разделим числитель и знаменатель «в столбик» на x-5.

$$\begin{array}{r|l} x^3-8x-85 & x-5 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3-5x^2} & x^2+5x+17 \\ 5x^2-8x-85 & \\ -\underline{5x^2-25x} & \\ 17x-85 & \\ -\underline{17x-85} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^4-3x^3+x^2-10x-225 & x-5 \\ \cline{2-2} -\underline{x^4-5x^3} & x^3+2x^2+11x+45 \\ 2x^3+x^2-10x-225 & \\ -\underline{2x^3-10x^2} & \\ 11x^2-10x-225 & \\ -\underline{11x^2-55x} & \\ 45x-225 & \\ -\underline{45x-225} & \\ 0 & \end{array}$$

Тогда x^3-8x-85=$(x$-5$)\cdot(x^2$+5x+17$)$,

и x^4-3x^3+x^2-10x-225=$(x$-5$)\cdot(x^3$+2x^2+11x+45$)$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\cdot(x^2+5x+17)}{(x-5)\cdot(x^3+2x^2+11x+45)}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2+5x+17}{x^3+2x^2+11x+45}=\frac{67}{275}.$$

Часто при раскрытии неопределенностей используют формулы сокращенного умножения в разных вариантах и сочетаниях

Формулы сокращенного умножения	
$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$	- разность квадратов
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	- квадрат суммы
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	- квадрат разности
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$	- разность кубов
$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$	- сумма кубов
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	- куб разности
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	- куб суммы

Пример 18.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^4-16}=\left|\begin{array}{c}\textit{подставим число } 2\\ \textit{вместо } x\end{array}\right|=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{\left(x^2\right)^2-4^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{применим формулы}\\ \textit{разность кубов и}\\ \textit{разность квадратов}\end{array}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}{(x^2-4)\cdot(x^2+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{(x+2)\cdot(x^2+4)}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}.$$

Пример 19.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x+24}-3}{\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-9x+19}}=\left|\begin{array}{c}\textit{подставим число } 3\\ \textit{вместо } x\end{array}\right|=\left(\frac{0}{0}\right)$$

По правилу для раскрытия неопределенности нужно найти в числителе и знаменателе сомножитель $x-3$. Для этого домножим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы, чтобы получилась формула разности кубов. А знаменатель (и, соответственно, числитель) домножим на сопряженное выражение, чтобы получить формулу разность квадратов. Получим достаточно громоздкое выражение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt[3]{x+24}-3)\cdot((\sqrt[3]{x+24})^2+3\sqrt[3]{x+24}+9)\cdot}{(\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-9x+19})\cdot(\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-9x+19})\cdot}.$$

$$\frac{\cdot(\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-9x+19})}{\cdot((\sqrt[3]{x+24})^2+3\sqrt[3]{x+24}+9)}=$$

В числителе и знаменателе формулы сокращенного умножения:

$$(\sqrt[3]{x+24}-3)\cdot((\sqrt[3]{x+24})^2+3\sqrt[3]{x+24}+9)=\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^3-3^3$$

$$(\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-9x+19})\cdot(\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-9x+19})=$$

$$=\left(\sqrt{x^2-4x+4}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-9x+19}\right)^2$$

В скобки, которые не являются частью соответствующей формулы, вместо x подставим число 3. Получаем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+24-27)\cdot 2}{(x^2-4x+4-(x^2-9x+19))\cdot 27}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot 2}{(5x-15)\cdot 27}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot 2}{5(x-3)\cdot 27}=\frac{2}{135}.$$

Обратите внимание, что здесь рассмотрены все варианты использования формул сокращенного умножения. А в ваших заданиях они будут представлены в разных сочетаниях.

Одним из эффективных способов раскрытия неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ является замена бесконечно малых величин в окрестности предельной точки на эквивалентные им бесконечно малые, аналитическая запись которых проще, чем у исходного выражения.

Для этого достаточно понять принципы использования таблицы эквивалентностей.

Две бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *называются эквивалентными,* если предел их отношения равен единице.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

ТАБЛИЦА ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ	
если $x\to 0$, то верны следующие выражения	Если $\beta(x)\to 0$ при $x\to x_0$, где x_0 - любое число, то верны следующие выражения
1) $\sin x \cong x$	1) $\sin\beta(x) \sim \beta(x)$
2) $tgx \cong x$	2) $\operatorname{tg}\beta(x) \sim \beta(x)$
3) $\arcsin x \cong x$	3) $\arcsin\beta(x) \sim \beta(x)$
4) $arctgx \cong x$	4) $\operatorname{arctg}\beta(x) \sim \beta(x)$
5) $e^x-1\cong x$	5) $e^{\beta(x)}-1 \sim \beta(x)$

6) $a^x - 1 \cong x \cdot \ln a$	6) $a^{\beta(x)} - 1 \sim \beta(x) \cdot \ln a$
7) $\ln(1+x) \cong x$	7) $\ln(1+\beta(x)) \sim \beta(x)$
8) $\log_a(1+x) \cong \dfrac{x}{\ln a}$	8) $\log_a(1+\beta(x)) \sim \dfrac{\beta(x)}{\ln a}$
9) $1-\cos x \cong \dfrac{x^2}{2}$	9) $1 - \cos \beta(x) \sim \dfrac{\beta^2(x)}{2}$
10) $(1+x)^\alpha \cong 1+\alpha \cdot x$	10) $(1+\beta(x))^\alpha \cong 1+\alpha \cdot \beta(x)$

Переход от одних бесконечно малых к эквивалентным им будем обозначать значком $\cong$.

Пример 20.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \cong \left(\begin{array}{l} \text{заменим числитель и знаменатель} \\ \text{на эквивалентные} \end{array}\right) \cong \lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$$

Пример 21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{arctg^2 4x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \cong \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{(4x)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{16x} = \left(\dfrac{3}{0}\right) = \infty$

Пример 22.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8-x^2}-2}{\ln(1-4x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8\left(1-\frac{x^2}{8}\right)}-2}{\ln(1-4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(1-\frac{x^2}{8}\right)^{\frac{1}{3}}-2}{\ln(1-4x)} \cong$$

$$\cong \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{8}\right)-2}{-4x} == \lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{8}-2}{-4x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{8}}{-4x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{96} = 0$$

Пример 23.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2-4x-5)}{arctg(x^3+1)} = \left(\frac{0}{0}\right) \cong \left|\begin{array}{l} \sin(x^2-4x-5) \cong (x^2-4x-5) \\ arctg(x^3+1) \cong (x^3+1) \end{array}\right| \cong \lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^3+1} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{подставим число} \\ -1 \text{ вместо } x \end{array}\right| = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

Далее раскрываем неопределенность по правилу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\cdot(x-5)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-5}{x^2-x+1} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Пример 24.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-5x+7)}{5^{x^2}-625} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{\ln(1+(x^2-5x+6))}{5^{x^2}-5^4} = \lim_{x\to 2} \frac{\ln(1+(x^2-5x+6))}{5^4(5^{x^2-4}-1)} \cong$$

$$\cong \lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{5^4(x^2-4)\ln 5} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

Далее раскрываем неопределенность по правилу $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x-3)}{5^4(x-2)\cdot(x+2)\cdot\ln 5} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{5^4(x+2)\cdot\ln 5} = \frac{-1}{2500\ln 5}.$$

ПРАВИЛО *для раскрытия неопределенности* (1^{∞})

Для раскрытия этой неопределенности применяется второй замечательный предел:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}71828 \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

а также обобщенный вариант формулы

$$\lim_{\substack{f(x)\to 0\\(x\to a)}} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e.$$

Основная идея при отыскании пределов, дающих неопределенность 1^{∞}, выполнить преобразования выражения, стоящего под знаком предела так, чтобы сконструировать формулу второго замечательного предела.

Пример 28. Вычислить предел функции.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+1} = \left(1^{\infty}\right) = \left(\begin{matrix} \text{чтобы получилось число } e, \text{ показатель} \\ \text{степени должен быть } \dfrac{x}{2} \end{matrix}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}\cdot(x+1)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2}{x}\cdot(x+1)} = \left(\text{находим } \lim_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 2\right) = e^2$$

Пример 29.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3}{x^2+4}\right)^{x} = \left(1^{\infty}\right) = \left(\begin{matrix} \text{чтобы получилось число } e, \text{ показатель} \\ \text{степени должен быть } \dfrac{x^2+4}{x-3} \end{matrix}\right) =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3}{x^2+4}\right)^{\frac{x^2+4}{x-3}\cdot\frac{x-3}{x^2+4}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}e^{\cdot\frac{x-3}{x^2+4}\cdot x}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot(x-3)}{x^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=1\right)=e.$$

Пример 30.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{x^2+4}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{2x+5}-1\right)^{x^2+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1-2x-5}{2x+5}\right)^{x^2+4}==\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{2x+5}\right)^{x^2+4}=$$

Чтобы получилось число e, показатель степени должен быть $-\dfrac{2x+5}{6}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{2x+5}\right)^{-\frac{2x+5}{6}\cdot\frac{-6}{2x+5}\cdot(x^2+4)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-6}{2x+5}\cdot(x^2+4)}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-6(x^2+4)}{2x+5}\right)=e^{-\infty}=0\cdot$$

Пример 31.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+16}{n^2+2n-3}\right)^{n+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\left|\text{раскроем неопределенность }\frac{\infty}{\infty}\text{ и получим }1\right|=$$

$$=\left(1^\infty\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2-5n+16}{n^2+2n-3}-1\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2-5n+16-n^2-2n+3}{n^2+2n-3}\right)^{n+5}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7n+19}{n^2+2n-3}\right)^{n+5}==\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7n+19}{n^2+2n-3}\right)^{\frac{n^2+2n-3}{-7n+19}\cdot\frac{-7n+19}{n^2+2n-3}\cdot(n+5)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-7n+19}{n^2+2n-3}\right)^{\frac{n^2+2n-3}{-7n+19}}\right)^{\frac{(-7n+19)\cdot(n+5)}{n^2+2n-3}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{(-7n+19)\cdot(n+5)}{n^2+2n-3}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=e^{-7}$$

Предел показателя степени найден по правилу неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 32.

$$\lim_{x\to5}(16-3x)^{\frac{1}{x^2-25}}=(1^\infty)=\lim_{x\to5}\left((1+(15-3x))^{\frac{1}{15-3x}}\right)^{\frac{15-3x}{x^2-25}}=$$

$$\lim_{x\to5}e^{\frac{15-3x}{x^2-25}}=\lim_{x\to5}e^{\frac{3(5-x)}{(x-5)\cdot(x+5)}}=e^{\frac{0}{0}}=e^{-\frac{3}{10}}.$$

Предел показателя степени найден по правилу неопределенности $\frac{0}{0}$.

Пример 33.

$$\lim_{x\to-2}(9+4x)^{\frac{1}{\ln(x^2-3)}}=(1^\infty)=\lim_{x\to-2}\left((1+(8+4x))^{\frac{1}{8+4x}}\right)^{\frac{8+4x}{\ln(x^2-3)}}=\lim_{x\to-2}e^{\frac{8+4x}{\ln(x^2-3)}}=$$

$$\cong\lim_{x\to-2}e^{\frac{8+4x}{\ln(1+(x^2-4))}}\cong\lim_{x\to-2}e^{\frac{4(2+x)}{x^2-4}}=\lim_{x\to-2}e^{\frac{4(2+x)}{(x-2)\cdot(x+2)}}=e^{-1}.$$

Предел показателя степени найден с помощью эквивалентных бмф.

К неопределенности вида 1^∞ нередко сводятся другие с помощью преобразования элементарных функций.

Пример 34. $\lim\limits_{n\to\infty}(5n-2)\cdot(\ln(2n+3)-\ln(2n-7))=(\infty\cdot(\infty-\infty))=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{n\to\infty}(5n-2)\cdot\ln\frac{2n+3}{2n-7}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2n+3}{2n-7}\right)^{5n-2}=\ln\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-7}\right)^{5n-2}=$$

$$=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+3}{2n-7}-1\right)^{5n-2}=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+3-2n+7}{2n-7}\right)^{5n-2}=$$

$$=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{2n-7}\right)^{\frac{2n-7}{10}\cdot\frac{10}{2n-7}\cdot(5n-2)}=\ln\lim_{n\to\infty}(e)^{\frac{10}{2n-7}\cdot(5n-2)}=\ln e^{25}=25.$$

2.4. Производная функции

Определение, физический, геометрический смысл производной. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Примеры отыскания производных.

Пусть задана функция $y=y(x)$. Обозначим Δx - малое приращение аргумента x. Тогда приращение функции выражается формулой $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$.

Производной функции $y=y(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

Физический смысл. Производная представляет собой скорость изменения некоторого процесса в каждый момент времени.

Геометрический смысл. Производная представляет собой тангенс угла наклона касательной к графику функции в определенной точке. Уравнение касательной к графику функции в заданной точке находят по формуле

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$$

Процесс отыскания производной функции называется *дифференцированием*. Если функция имеет производную в данной точке, то она называется дифференцируемой в данной точке. Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то она называется дифференцируемой на интервале.

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она и *непрерывна в этой точке*. Но обратное утверждение неверно!

Примером точек, в которых функция непрерывна но не дифференцируема (то есть не имеет производной) являются точки возврата функции. На графике функции это «негладкие» точки. В такой точке невозможно построить касательную к графику функции.

Правила дифференцирования		
Формулировка	Формула	Пример
1. Производная от числа равна нулю	$(const)' = 0$	$(5)' = 0;\ (\pi)' = 0$ $(e)' = 0$
2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной	$\left(\alpha \cdot y(x)\right)' = \alpha \cdot y'(x)$	$(3x)' = 3(x)'$ $(\pi \sin 2x)' = \pi(\sin 2x)'$
3. Производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(3x + \sin 2x)' =$ $= (3x)' + (\sin 2x)'$
4. Правило для произведения функций	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$(2x \cdot \ln x)' =$ $= (2x)' \ln x + 2x(\ln x)'$
5. Правило для производной от дроби	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{2x}{\ln x}\right)' = \dfrac{(2x)' \ln x - 2x(\ln x)'}{\ln^2 x}$

Производную сложной функции находят по формуле

$$y'_x = f'_\varphi \cdot \varphi'_x$$

Пример 1. Найти производную $y = 2x^3 + 3x^4 + 5x - 3$

$$y' = (2x^3 + 3x^4 + 5x - 3)' = 2(x^3)' + 3(x^4)' + 5x' - 0 =$$

$$2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + 5 \cdot 1 = 6x^2 + 12x^3 + 5.$$

Пример 2. $y = 6x^7 - 3x^3 + \dfrac{4x^2}{5} + \cos 2$

$$y' = \left(6x^7 - 3x^3 + \frac{4x^2}{5} + \cos 2\right)' = 42x^6 - 9x^2 + \frac{8}{5}x.$$

Запишем таблицу производных для сложной функции.

Таблица производных	
$(x)' = 1$	8) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
1) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	9) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2) $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	10) $(tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
3) $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$	11) $(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
4) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	12) $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
5) $(e^u)' = e^u \cdot u'$	13) $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
6) $(\log_a u)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{u} \cdot u'$	14) $(arctg\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
7) $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$	15) $(arcctg\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример 3. Найти производную $y = 3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

Воспользуемся формулами из алгебры $\sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}$; $\quad x^{-k} = \dfrac{1}{x^k}$.

$$y' = \left(3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)' = \left(3x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-2} + 4x^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} - 4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} - 3 \cdot (-2) x^{-2-1} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} =$$

$$= \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{8}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 6x^{-3} - 2x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{6}{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}$$

Пример 4. Найти производную произведения функций

$$y = (x^2 + 1) \cdot \cos x \Rightarrow y' = \left((x^2 + 1) \cdot \cos x\right)' = (x^2 + 1)' \cdot \cos x +$$

$$+ (x^2 + 1) \cdot (\cos x)' = 2x \cdot \cos x - (x^2 + 1) \cdot \sin x.$$

Пример 5. Найти производную произведения функций

$$y = \sqrt{x} \cdot \arcsin x$$

$$y' = \left(\sqrt{x} \cdot \arcsin x\right)' = (\sqrt{x})' \cdot \arcsin x + \sqrt{x} \cdot (\arcsin x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \arcsin x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пример 6. Найти производную дроби $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x - 1}$

$$y' = \left(\frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}\right)' = \frac{(x^3 + 2x^2)' \cdot (x - 1) - (x^3 + 2x^2) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} =$$

$$\frac{(3x^2 + 4x)(x - 1) - (x^3 + 2x^2) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^3 - x^2 - 4x}{(x - 1)^2}$$

Пример 7. Найти производную сложной функции $y = \sqrt{2x + 1}$

$$y' = \left(\sqrt{2x + 1}\right)' = \left(\begin{matrix} \textit{пусть } u = 2x + 1 \\ \textit{применяем формулу 2 из таблицы} \end{matrix}\right) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2x + 1}} \cdot (2x + 1)' = \frac{2}{2\sqrt{2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}.$$

Пример 8. Найти производную сложной функции $y=\cos(3x^4+x^5-3)$

$$y'=\left(\cos(3x^4+x^5-3)\right)'=\begin{pmatrix} \text{пусть } u=3x^4+x^5-3 \\ \text{применяем формулу 9 из таблицы} \end{pmatrix}=$$

$$-\sin(3x^4+x^5-3)\cdot(3x^4+x^5-3)'=-(12x^3+5x^4)\cdot\sin(3x^4+x^5-3).$$

Пример 9. Найти производную сложной функции $y=\dfrac{2}{\sqrt[5]{4x^2-1}}$

$$y'=\left(\frac{2}{\sqrt[5]{4x^2-1}}\right)'=\left(2\cdot(4x^2-1)^{-\frac{1}{5}}\right)'=\begin{pmatrix} u=4x^2-1 \text{ и применяем} \\ \text{формулу 1 из таблицы} \end{pmatrix}=$$

$$2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot(4x^2-1)^{-\frac{1}{5}-1}\cdot(4x^2-1)'=-\frac{2}{5}\cdot(4x^2-1)^{-\frac{6}{5}}\cdot 8x=-\frac{16x}{5\sqrt[5]{(4x^2-1)^6}}.$$

Пример 10. Найти производную сложной функции $y=\ln\cos(3x-1)$

$$y'=\left(\ln\cos(3x-1)\right)'=\begin{pmatrix} u=\cos(3x-1) \\ \text{и формулу 7} \end{pmatrix}=\frac{1}{\cos(3x-1)}\cdot\left(\cos(3x-1)\right)'=$$

$$=\begin{pmatrix} u=3x-1 \\ \text{формула 9} \end{pmatrix}=\frac{-1}{\cos(3x-1)}\cdot\sin(3x-1)\cdot(3x-1)'=\frac{-3\sin(3x-1)}{\cos(3x-1)}=-3tg(3x-1)$$

Пример 11. Найти производную сложной функции $y=\sin^2\sqrt{4x+3}$

$$y'=\left(\sin^2\sqrt{4x+3}\right)'=2\sin\sqrt{4x+3}\left(\sin\sqrt{4x+3}\right)'=2\sin\sqrt{4x+3}\cdot\cos\sqrt{4x+3}\left(\sqrt{4x+3}\right)'=$$

$$=2\cdot\sin\sqrt{4x+3}\cdot\cos\sqrt{4x+3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{4x+3}}\cdot(4x+3)'=4\cdot\sin\sqrt{4x+3}\cdot\cos\sqrt{4x+3}\cdot\frac{1}{\sqrt{4x+3}}$$

Пример 12. Найти производную сложной функции $y=\sqrt{arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

$$y'=\left(\sqrt{arctg\left(\frac{1}{x}\right)}\right)'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{arctg\left(\frac{1}{x}\right)}}\cdot\left(arctg\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{arctg\left(\frac{1}{x}\right)}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{arctg\left(\frac{1}{x}\right)}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^2$$

2.5. Исследование функций

Алгоритм исследования функции. Отыскание области определения функции. Асимптоты графика функции. Промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.

Алгоритм исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Найти асимптоты графика функции.
3. Определить четность (нечетность) функции:

Если выполняется условие f (-x)= f (x), то функция четная, ее график строится симметрично относительно оси Oy.

Если выполняется условие f (-x)=- f (x), то функция нечетная, ее график строится симметрично относительно начала координат.

4. Определить точки пересечения с осями координат.

С осью Ox: y=0, решить уравнение, записать координаты точек пересечения с осью.

С осью Oy: x=0, решить уравнение, записать координаты точек пересечения с осью.

5. Найти интервалы возрастания и убывания. Найти точки экстремума (минимума и максимума).
6. Построить макет графика функции.

Отыскание области определения функции

В п. 2.1. рассматривалось понятие области определения функции, а также основные элементарные функции.

Напомним основные утверждения, которые используются при отыскании области определения функции:

**Знаменатель дроби не должен быть равен нулю*

**Подкоренное выражение не должно быть отрицательным.*

**Аргумент логарифма должен быть строго положительным.*

Если аргумент функции может принимать любые значения, то область определения $x \in (-\infty; +\infty)$.

Например, аргументы таких функций как $y = x^n$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ могут принимать любые действительные значения. Область определения всех этих функций $x \in (-\infty; +\infty)$.

Для дробно-рациональной функции $y = \dfrac{1}{x^n}$ на аргумент накладывается ограничение *«Знаменатель дроби не должен быть равен нулю»*. Поэтому составляем неравенство: $x^n \neq 0$ и решаем его.

Пример 1. Найти область определения $y = \dfrac{x}{3x-4}$

Знаменатель дроби не должен быть равен нулю.

Составляем неравенство $3x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{4}{3} \Rightarrow$

Область определения $x \in \left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$

Пример 2. Найти область определения $y = \dfrac{1}{3-x^2}$

Знаменатель дроби не должен быть равен нулю.

Составляем неравенство $3 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{3} \Rightarrow$

Область определения $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Пример 3. Найти область определения $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

Подкоренное выражение не должно быть отрицательным. Составляем неравенство: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ и решаем его методом интервалов

Область определения $x \in \left(-\infty; 1\right) \cup \left(3; +\infty\right)$.

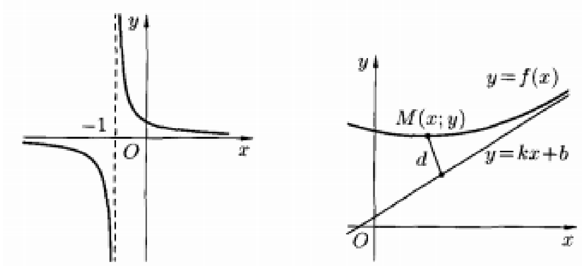
Пример 4. Найти область определения $y = \log_3(1 - x^2)$

Аргумент логарифма должен быть строго положительным. Составляем неравенство $1 - x^2 > 0$ и решаем его методом интервалов.

Область определения $x \in \left(-1; 1\right)$.

Отыскание асимптот графика функции

Асимптота графика функции – это прямая, обладающая таким свойством, что расстояние между этой прямой и точками графика функции стремится к нулю при условии, что точки удаляются от начала координат в бесконечность. Асимптоты могут быть вертикальные, наклонные и горизонтальные (рисунок).



Вертикальные асимптоты находятся в точках разрыва области определения функции. Вертикальная асимптота имеет уравнение вида $x = x_0$, где x_0 - точка разрыва области определения функции.

Наклонные асимптоты имеют уравнение $y = kx + b$,

где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$

Если $k = 0$ то асимптота горизонтальная.
Если $k = \infty$ или $b = \infty$ то для данной функции наклонной асимптоты не существует.

Пример 5. Дана функция $y = \dfrac{x}{3x-4}$. Найдем все асимптоты

1) Область определения. *Знаменатель дроби не должен быть равен нулю.* Составляем неравенство $3x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{4}{3} \Rightarrow$

область определения $x \in \left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$

2). Вертикальные асимптоты возникают в точках разрыва области определения. Область определения данной функции имеет разрыв в точке $x_0 = \dfrac{4}{3}$, следовательно есть вертикальная асимптота и ее уравнение $x = \dfrac{4}{3}$.

3) Наклонные асимптоты. Уравнение $y = kx + b$. Найдем k и b по формулам.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3x-4} : x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3x-4}\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3x-4}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3x-4} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3x-4}\right) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

Подставим и получим уравнение асимптоты $y = 0x + \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

Отыскание интервалов возрастания и убывания, точек экстремума (минимума и максимума).

Для определения промежутков возрастания и убывания, точек экстремума нужно:

1. Найти производную функции
2. Приравнять ее к нулю и решить полученное уравнение
3. Найденные корни уравнения отметить на числовой оси (это и есть критические точки I рода)
4. Определить знаки производной на полученных промежутках:

а) если производная на промежутке положительная, то функция возрастает на этом промежутке;

б) если производная на промежутке отрицательная, то функция убывает на этом промежутке.

5. Определить точки экстремума функции: если при переходе через точку x_0 производная меняет знак на противоположный, то x_0 – точка экстремума. Причем, если знак меняется с «+» на «-», то x_0 – точка максимума, если знак меняется с «-» на «+», то x_0 – точка минимума.

Пример 6. Исследовать на монотонность и экстремум функцию

$$y = x - \frac{x^3}{6}$$

1) Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$.

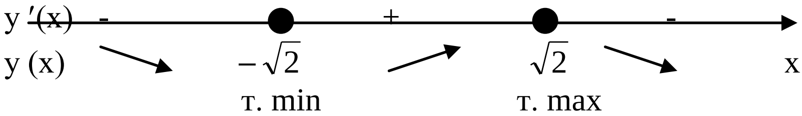
2) Найдем производную $y' = 1 - \frac{3x^2}{6} = 1 - \frac{x^2}{2}$

3) приравняем производную к нулю и решим уравнение

$y' = 1 - \frac{3x^2}{6} = 1 - \frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow$ x=$\pm\sqrt{2}$ - критические точки I рода. Отметим их на числовой оси (рисунок).

4) определим знаки производной на промежутках (рисунок).

5) определим характер точек экстремума (рисунок).



Ответ: промежуток возрастания $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Промежутки убывания $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$

Точка минимума $x = -\sqrt{2}$

Точка максимума $x = \sqrt{2}$

Минимум функции $y(-\sqrt{2}) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx -0{,}93$

Максимум функции $y(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}93$.

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Основная задача дифференциального исчисления состоит в нахождении дифференциала данной функции или ее производной. Интегральное исчисление решает обратную задачу: по заданному дифференциалу, а следовательно, и по производной неизвестной функции F(x), требуется определить эту функцию. Иными словами, имея выражение

$$F'(x)dx = dF(x) = f(x)dx$$

или соответственно

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

где $f(x)$ - известная функция, нужно найти функцию $F(x)$.

Искомая функция $F(x)$ называется при этом первообразной функцией по отношению к функции $f(x)$.

<u>Определение:</u> первообразной функцией для данной функции $f(x)$ на данном промежутке называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ или дифференциал которой равен $f(x)dx$ на рассматриваемом промежутке.

<u>Теорема:</u> Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество различных первообразных функций, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Если $F(x)$ есть первообразная от $f(x)$, т.е. если $F'(x) = f(x)$, то и $F(x)+c$, где $c-$ произвольная постоянная, есть также первообразная от $f(x)$ т.к. $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$.

Например, одной из первообразных функций для функции $3x^2$ будет x^3, так как $(x^3)' = 3x^2$. Функции x^3-4 и x^3+3 так же будут являться первообразными для функции $3x^2$: $(x^3-4)' = 3x^2$ и $(x^3+3)' = 3x^2$.

Введем теперь основное понятие интегрального исчисления – понятие неопределенного интеграла.

<u>Определение:</u> общее выражение $F(x)+c$ для всех первообразных от функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается символом $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x)+c.$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ - *подынтегральным выраже- нием*, а постоянная c может принимать любое значение и поэтому называется *произвольной постоянной*.

Геометрически в системе координат xOy, графики всех первообразных функций от данной функции $f(x)$ представляют семейство кривых, зависящее от одного параметра c, которые получаются одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси Oy (рис. 1).

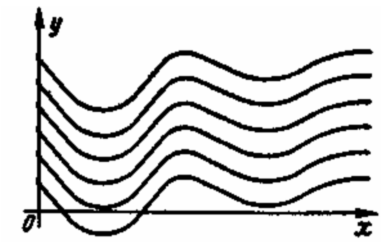


Рис. 1

Свойства неопределенного интеграла

I. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Ia. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

II. $\int d\left(F(x)\right) = F(x)+c$.

IIa. $\left(\int F(x)dx\right)' = F(x)+c$.

<u>*Замечание:*</u> символы d и $\int$, следующие друг за другом в том или ином порядке, взаимно уничтожают друг друга (если не учитывать постоянного слагаемого). В этом смысле *дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными математическими операциями.*

III. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,$ т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

IV. $\int \left(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx,$ т.е. интеграл от суммы равен сумме интегралов от всех слагаемых.

V. Если $\int f(x)dx = F(x) + c$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$.

Таблица интегралов

1. $\int du = u + c$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
3. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$
4. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$
6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
7. $\int e^u du = e^u + c$
8. $\int \sin u du = -\cos u + c$
9. $\int \cos u du = \sin u + c$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$
11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$
12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$
13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + c$
14. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + c$
15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$
16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + c$

В этих формулах a – постоянная, u – независимая переменная или любая (дифференцируемая) функция от независимой переменной.

Ориентировоч ная схема«Неопределенный интеграл»

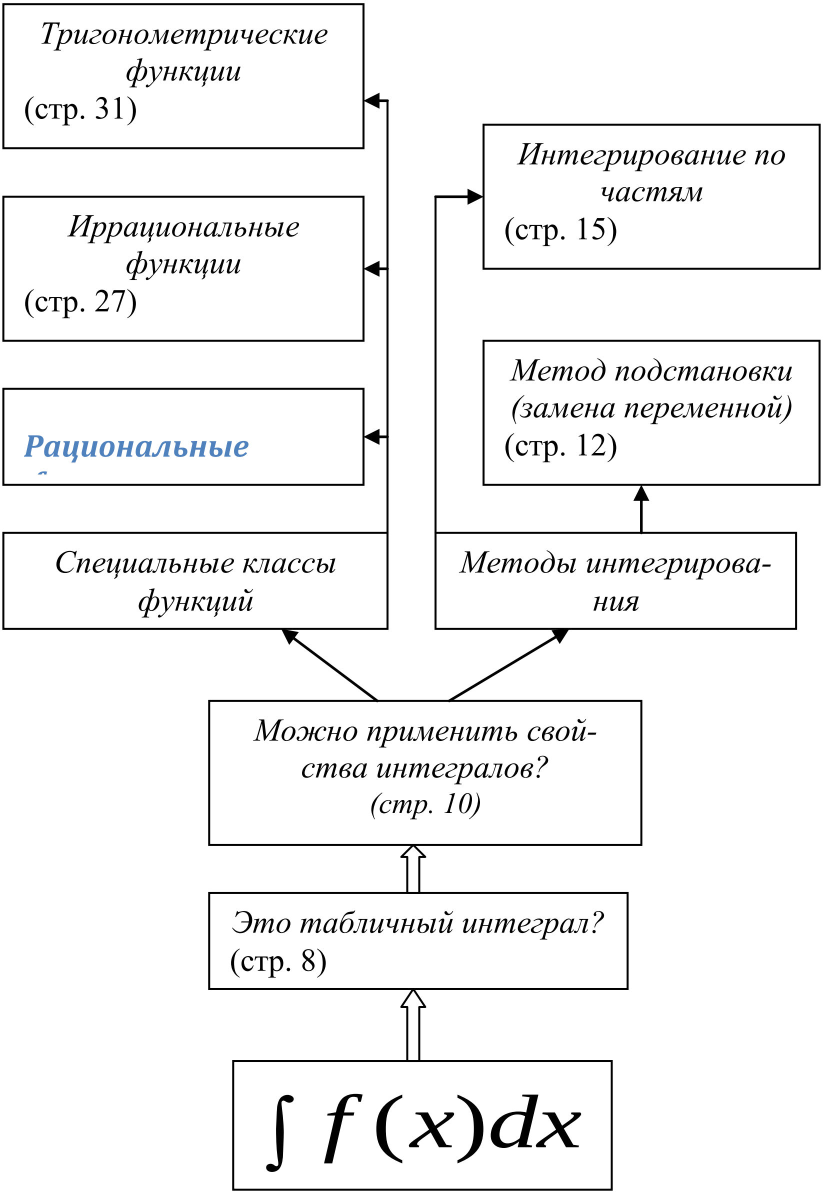


Рис. 2

Чтобы *взять интеграл* $\int f(x)dx$ необходимо (как показано на рис. 2) задать два основных вопроса:

- *это табличный интеграл?*

  Если ответ положительный, то идем на 7 страницу, если отрицательный – двигаемся далее по схеме:

- *можно применить свойства интегралов?*

  Если ответ положительный, то идем на 9 страницу, если отрицательный – двигаемся далее по схеме и анализируем подынтегральное выражение.

В конечном итоге мы всегда должны прийти к одному или

нескольким табличным интегралам.

Рассмотрим каждый пункт более подробно.

2. Табличное интегрирование

Пример 1. $\int x^7 dx$.

Найдем похожий интеграл в таблице интегралов. Это, формула 2 - интеграл от степенной функции, где степень $n = 7$. Запишем наши рассуждения следующим образом:

$$\int x^7 dx \equiv \left| \int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \right| = \frac{x^{7+1}}{7+1} + c = \frac{x^8}{8} + c.$$

Пример 2. $\int \frac{dz}{z^{16}}$.

Используя формулу элементарной математики, $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ преобразуем подынтегральное выражение: $\int z^{-16} dz$. В результате получаем интеграл от степенной функции, где $n = -16$.

$$\int \frac{dz}{z^{16}} = \int z^{-16} dz \equiv \left| \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} = c \right| = \frac{z^{-16+1}}{-16+1} + c = \frac{z^{-15}}{-15} + c =$$

$$= -\frac{1}{15z^{15}} + c.$$

Пример 3. $\int \frac{dt}{\sqrt[9]{t^5}}$.

Пользуясь формулами $\sqrt[m]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$ и $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, приводим интеграл к табличному виду:

$$\int \frac{dt}{\sqrt[9]{t^5}} \equiv \left| \begin{matrix} k = 5 \\ m = 9 \end{matrix} \right| = \int t^{-\frac{5}{9}} dt \equiv \left| \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \right| =$$

$$= \frac{t^{-\frac{5}{9}+1}}{-\frac{5}{9}+1} + c = \frac{t^{\frac{4}{9}}}{\frac{4}{9}} + c = \frac{9}{4} t^{\frac{4}{9}} + c = \frac{9}{4} \sqrt[9]{t^4} + c.$$

Пример 4. $\int \frac{dy}{y^2 + 64}$.

Это табличная формула 14, где $u^2 = y^2$, $a^2 = 64 = 8^2$, следовательно $u = y$, $a = 8$.

$$\int \frac{dy}{y^2 + 64} = \int \frac{dy}{y^2 + 8^2} \equiv \left| \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + c \right| = \frac{1}{8} arctg \frac{y}{8} + c$$

Пример 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{6 - x^2}}$

Это табличный интеграл 15, где $u^2 = x^2$, $a^2 = 6 = (\sqrt{6})^2$, следовательно $u = x$, $a = \sqrt{6}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 - x^2}} \equiv \left| \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c \right| = \arcsin \frac{x}{\sqrt{6}} + c \cdot$$

Пример 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$

Это табличный интеграл 17, где $u^2 = x^2$, $a = 7$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}} \equiv \left| \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a}\right| + c \right| = \ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right| + c.$$

3. Свойства интегралов

Пример 1. $\int \left(\frac{1}{6x} + 2x^5 - \cos x \right) dx$

Подынтегральная функция представляет собой алгебраи- ческую сумму, значит можно применить свойство IV

$$\int \left(\frac{1}{6x} + 2x^5 - \cos x \right) dx = \int \frac{1}{6x} dx + \int 2x^5 dx - \int \cos x dx$$

Рассмотрим каждый из полученных интегралов в отдельности:

1) $\int \frac{1}{6x} dx$ *Применяя свойство III выносим постоянный мно-*

житель за знак интеграла и получаем табличный интеграл 5.

$$\int \frac{1}{6x} dx = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} \equiv \left| \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \right| = \frac{1}{6} \ln|x| + c.$$

2) $\int 2x^5 dx$ *Применяя свойство III выносим постоянный мно-*

житель за знак интеграла и получаем табличный интеграл 2,

где $n = 5$.

$$\int 2x^5dx = 2\int x^5dx \equiv \left|\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+c\right| = 2\frac{x^{5+1}}{5+1}+c = \frac{2x^6}{6}+c =$$

$$= \frac{x^6}{3}+c.$$

3) $\int \cos xdx$ - *Это табличная формула 9.*

$$\int \cos xdx \equiv \left|\int \cos udu = \sin u + c\right| = \sin x + c$$

Краткая запись наших рассуждений будет следующей:

$$\int\left(\frac{1}{6x}+2x^5-\cos x\right)dx = \int\frac{1}{6x}dx + \int 2x^5dx - \int\cos xdx = \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}+$$

$$+2\int x^5dx - \int\cos xdx = \frac{1}{6}\ln|x| + \frac{x^6}{3} - \sin x + c.$$

Некоторые интегралы довольно просто решаются путем элементарных алгебраических преобразований.

Пример 2. $\int\frac{1-6x^3+4x^2}{x^2}dx$.

Если подынтегральная функция является дробью и ее числитель – алгебраическая сумма, то нужно разделить почленно числи-

тель на знаменатель; в результате подынтегральная функция окажется суммой трех слагаемых:

$$\int \frac{1-6x^3+4x^2}{x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{6x^3}{x^2}+\frac{4x^2}{x^2}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-6x+4\right)dx.$$

Рассуждая как в предыдущем примере, получаем следующее:

$$\int \frac{1-6x^3+4x^2}{x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-6x+4\right)dx = \int x^{-2}dx - 6\int xdx + 4\int dx =$$

$$\equiv \left|\text{формулы } 1 \text{ и } 2\right| = -\frac{1}{x} - 3x^2 + 4x + c.$$

Пример 3. $\int 6^t(6^{-t}+4)dt$.

Чтобы подынтегральная функция представляла собой сумму необходимо раскрыть скобки:

$$\int 6^t(6^{-t}+4)dt = \int(6^t\cdot 6^{-t}+4\cdot 6^t)dt = \int(1+4\cdot 6^t)dt.$$

Применяя свойства интегралов и табличные формулы 1 и 6, получаем:

$$\int 6^t(6^{-t}+4)dt = \int(1+4\cdot 6^t)dt = \int dt + 4\int 6^t dt = t + 4\frac{6^t}{\ln 6}+c.$$

Пример 4. $\int \sin(3x+5)dx$

Для нахождения данного интеграла применим свойство V, где

$a=3,\ b=5$ *и табличный интеграл 8.*

$$\int \sin(3x+5)dx \equiv \left|\int \sin u du = -\cos u + c\right| = -\frac{1}{3}\cos(3x+5)+c\,.$$

Пример 5. $\int \frac{dy}{\cos^2 7y}$.

Для решения используем табличный интеграл 11 и свойство V,

где $a=7,\ b=0$,.

$$\int \frac{dy}{\cos^2 7y} \equiv \left|\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c\right| = \frac{1}{7} tg 7y + c\,.$$

Пример 6. $\int \frac{dz}{5-9z}$.

Данный интеграл похож на табличную формулу 5, где

$u=5-9z,$ *воспользуемся свойством V, где* $a=-9,\ b=5$.

$$\int \frac{dz}{5-9z} \equiv \left|\int \frac{du}{u} = \ln u + c\right| = -\frac{1}{9}\ln(5-9z)+c\,.$$

Пример 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$

Этот интеграл похож на табличный интеграл 17, где $u^2=4x^2=(2x)^2$, $a^2=1$, тогда $u=2x,\ a=1$.

$\int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2-1^2}}$. Чтобы интеграл стал табличным, нужно чтобы под знаком дифференциала находился аргумент $2x$, то есть $d(2x)$. Необходимо *«выровнять»* коэффициенты: $d(2x)=2dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}d(2x)$. Запишем интеграл в новом виде:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2-1^2}}=\int \frac{\frac{1}{2}d(2x)}{\sqrt{(2x)^2-1^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2-1}}=$$

$$\equiv \left|\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a}\right|+c\right|=\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-1}\right|+c.$$

Пример 8. $\int \frac{7dt}{25t^2-6}$

Если мы поменяем местами слагаемые в знаменателе $\frac{7}{25t^2-6}=-\frac{7}{6-25t^2}$, то это будет «почти табличная» формула 16, где $u^2=25t^2=(5t)^2$, $a^2=6=(\sqrt{6})^2$, тогда $u=5t,\ a=\sqrt{6}$. Далее пользуемся свойством интеграла III и свойством дифференциала, рассмотренным в предыдущем примере:

$$\int \frac{7dt}{25t^2-6}=\int\left(-\frac{7}{6-25t^2}\right)dt \equiv \left|\begin{matrix} d(5t)=5dt \\ dt=\frac{1}{5}d(5t)\end{matrix}\right| = -7\int \frac{\frac{1}{5}d(5t)}{6-25t^2}=$$

$$=-7\cdot\frac{1}{5}\int \frac{d(5t)}{(\sqrt{6})^2-(5t)^2}\equiv\left|\int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c\right|=$$

$$=-\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+5t}{\sqrt{6}-5t}\right|+c=-\frac{7}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+5t}{\sqrt{6}-5t}\right|+c.$$

4. Методы интегрирования

4.1. Метод подстановки (замена переменной)

Весьма эффективным методом интегрирования является метод замены переменной, в результате чего заданный интеграл заменяется другим интегралом. Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ можно заменить переменную x новой переменной t, связанной с x подходящей формулой $x=\varphi(t)$. Определив из этой формулы $dx=\varphi'(t)dt$ и подставляя, получим

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int F(t)dt.$$

Не существует определенного правила, следуя которому можно всегда понять, какую подстановку надо применять к данному интегралу. Однако следует иметь в виду следующие полезные подсказки:

1) если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, то, как правило, используется подстановка $t=\varphi(x)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция $\sin\frac{1}{x}$, то стоит попробовать подстановку $t=\frac{1}{x}$, а если e^{x^2} -то $t=x^2$ и т.д.);

2) если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $\varphi(x)$, т.е. выражение $\varphi'(x)dx$, то целесообразно использовать следующие формулы для наиболее часто встречающихся дифференциалов:

1. $d(f(u))=f'(u)du$,
2. $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$,
3. $xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$,
4. $\frac{1}{x^2}dx=-d\left(\frac{1}{x}\right)$,
6. $e^x dx=d(e^x)$
7. $\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$
8. $\sin xdx=-d(\cos x)$,
9. $\cos xdx=d(\sin x)$

5. $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\left(\sqrt{x}\right)$,

10. $\frac{1}{\sin^2 x}dx = -d\left(ctgx\right)$

11. $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d\left(tgx\right)$ и т.д.

В простых случаях введение новой переменной можно проводить в уме, мысленно обозначив соответствующую функцию как новую переменную t (или какой-либо другой переменной: u, y, z…).

Пример 1. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+a}}$.

Так как в числителе подынтегральной дроби записан готовый дифференциал: $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+a)$, то в этом случае очень удобно сделать следующую замену переменной: $x^2 + a = z$.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+a}} \equiv \left| \begin{matrix} z = x^2 + a \\ dz = 2xdx \\ \frac{dz}{2} = xdx \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt[3]{z}} = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{3}}dz \equiv \left| \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt[3]{z^2}}{2} + c = \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{4} + c.$$

Обязательно делаем обратную замену, то есть возвращаемся к старой переменной: $\frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{z^2} + c = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{(x^2+a)^2} + c$. Получаем окончательный ответ: $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+a}} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{(x^2+a)^2} + c$.

Пример 2. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$.

И снова в числителе видим готовый дифференциал: $\sin xdx = -d\left(\cos x\right)$. Сделаем замену: $t = 1 + 2\cos x$, тогда $dt = d(1+2\cos x) = -2\sin xdx$. Выравниваем коэффициенты и получаем: $\frac{dt}{-2} = \sin xdx$.

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}} \equiv \left| \begin{aligned} t &= 1+2\cos x \\ dt &= -2\sin x dx \\ \frac{dt}{-2} &= \sin x dx \end{aligned} \right| = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt \equiv$$

$$\equiv \left| \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \right| = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1+2\cos x} + c.$$

Пример 3. $\int \frac{e^y dy}{9-4e^y}$.

Так как числитель подынтегральной дроби можно записать в виде: $e^y dy = d(e^y)$, то удобно сделать замену переменной: $x = 9-4e^y$. Тогда $dx = d(9-4e^y) = -4e^y dy$. Выравниваем коэффициенты и получаем: $e^y dy = -\frac{1}{4}dx$.

$$\int \frac{e^y dy}{9-4e^y} \equiv \left| \begin{aligned} x &= 9-4e^y \\ dx &= -4e^y dy \\ \frac{dx}{-4} &= e^y dy \end{aligned} \right| = \int \frac{-\frac{1}{4}dx}{x} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{4}\ln|x| + c =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|9-4e^y\right| + c.$$

Пример 4. $\int \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}dx$.

Подынтегральное выражение содержит логарифмическую функцию. Обратив внимание на знаменатель, используем формулу $\frac{1}{u}du = d(\ln u)$ и делаем замену: $t = 4+\ln x$,

$dt = d(4+\ln x) = \frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}dx \equiv \left| \begin{matrix} t = 4+\ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int \sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{2\sqrt{t^3}}{3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(4+\ln x)^3} + c.$$

Пример 5. $\int \frac{2x^2dx}{x^6+3}$.

Так как в числителе подынтегральной дроби записан дифференциал функции: $x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3)$, а $x^6 = (x^3)^2$, заменим на новую переменную x^3:

$$\int \frac{2x^2dx}{x^6+3} = 2\int \frac{x^2dx}{(x^3)^2+3} \equiv \left| \begin{matrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2dx \\ \dfrac{dt}{3} = x^2dx \end{matrix} \right| = 2\int \frac{\frac{1}{3}dt}{t^2+3} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+3} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}} + c = \frac{2}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x^3}{\sqrt{3}} + c.$$

4.2. Интегрирование по частям

Из формулы дифференциала произведения $d(uv) = udv + vdu$ интегрированием обеих частей равенства получается формула интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

По этой формуле отыскание интеграла $\int udv$ сводится к отысканию другого интеграла *vdu.* применение ее целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл будет проще исходного или когда он будет ему подобен.

Для применения формулы интегрирования по частям к некоторому интегралу $\int f(x)dx$ следует подынтегральное выражение $f(x)dx$ представить в виде произведения двух множителей u и dv. За dv всегда выбирается такое выражение, содержащее dx, из которого посредством интегрирования можно найти v; за u в большинстве случаев принимается функция, которая при дифференцировании упрощается (например: $\arcsin x$, $arctg 3x$, $\ln x^3$).

***Замечание I*:** если под знаком интеграла находится произведение степенной и показательной функций или произведение степенной и тригонометрической функций, то за $u(x)$ выбираем степенную функцию.

$$\int \underbrace{P(x)}_{u(x)} \cdot e^x dx \quad \text{или}$$

$$\int \underbrace{P(x)}_{u(x)} \cdot a^x dx \quad \text{или}$$

$$\int \underbrace{P(x)}_{u(x)} \cdot \sin x dx (\cos x dx, tgx dx)$$

Пример 1. $\int x \sin x dx$.

Под интегралом – произведение степенной функции x и тригонометрической функции $\sin x$. Обозначаем за $u(x)$ степенную функцию x, то есть $u = x$; тогда $dv = \sin x dx$. Чтобы использовать формулу интегрирования по частям необходимо найти $du = u'dx$ и $v = \int dv$.В нашем примере получается, что $du = (x)' dx = dx$, а $v = \int \sin x dx = -\cos x$.

$$\int x \sin x dx \equiv \left| \begin{matrix} u = x \Rightarrow & du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow & v = -\cos x \end{matrix} \right| = x(-\cos x) -$$

$$-\int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

Пример 2. $\int (2x^2 + 3x - 5) e^{3x} dx$

Под интегралом находится произведение степенной функции

$2x^2+3x-5$ и показательной e^{3x}.

$$\int(2x^2+3x-5)e^{3x}dx \equiv \left| \begin{array}{c} u=2x^2+3x-5 \\ \Downarrow \\ du=(2x^2+3x-5)'dx=(4x+3)dx \\ dv=e^{3x}dx \\ \Downarrow \\ v=\int e^{3x}dx=\dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$\left(2x^2+3x-5\right)\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}(4x+3)dx=\frac{1}{3}\left(2x^2+3x-5\right)\cdot e^{3x}-$$

$$-\frac{1}{3}\int e^{3x}(4x+3)dx.$$

Снова получили интеграл, содержащий произведение степенной $4x+3$ и показательной e^{3x} функций. Необходимо еще раз применить формулу интегрирования по частям для интеграла:

$$\int e^{3x}(4x+3)dx \equiv \left| \begin{array}{c} u=4x+3 \\ \Downarrow \\ du=(4x+3)'dx=4dx \\ dv=e^{3x}dx \\ \Downarrow \\ v=\int e^{3x}dx=\dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$=(4x+3)\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}\cdot 4dx=\frac{1}{3}(4x+3)\cdot e^{3x}-\frac{4}{3}\int e^{3x}dx=$$

$$=\frac{1}{3}(4x+3)e^{3x}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}+c.$$

Запишем наше решение в следующем виде:

$$\int(2x^2+3x-5)e^{3x}dx \equiv \left| \begin{array}{cc} u=2x^2+3x-5 & du=(4x+3)dx \\ dv=e^{3x}dx & v=\dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}(2x^2+3x-5)-\frac{1}{3}\int e^{3x}(4x+3)dx \equiv \left| \begin{array}{cc} u=4x+3 & du=4dx \\ dv=e^{3x}dx & v=\dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}(2x^2+3x-5)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(4x+3)e^{3x}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}(2x^2+3x-5)-\frac{1}{9}(4x+3)e^{3x}+\frac{4}{27}e^{3x}+c.$$

Замечание II: если под знаком интеграла находится произведение степенной и логарифмической функций или произведение степенной и обратной тригонометрической функций, то за $u(x)$ выбираем логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию:

$$\int P(x)\cdot\underbrace{\log_a x}_{u(x)}dx \quad \textit{или}$$

$$\int P(x)\cdot\underbrace{\arcsin x}_{u(x)}dx(\arccos x, arctgx)$$

Пример 3. $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$.

Подынтегральная функция – это произведение степенной функции $\frac{1}{x^3}$ и логарифмической функции $\ln x$.

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx\equiv\left|\begin{array}{lll} u=\ln x & \Rightarrow & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{x^3} & \Rightarrow & v=-\dfrac{1}{2x^2}\end{array}\right|=-\frac{\ln x}{2x^2}-\int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+c.$$

Замечание III: если под знаком интеграла находится произведение показательной и тригонометрической функций, то за $u(x)$ можно выбрать любую из этих функций. В этом случае формулу интегрирования по частям применяем дважды, возвращаемся к первоначальному интегралу и решаем полученное уравнение.

Пример 4. $\int 3^{-x}\cos\frac{x}{2}dx$.

Подынтегральная функция является произведением показательной функции 3^{-x} и тригонометрической функции $\cos\frac{x}{2}$.

$$\int 3^{-x}\cos\frac{x}{2}dx \equiv \left| \begin{array}{lcr} u=3^{-x} & \Rightarrow & du=-3^{-x}\ln 3dx \\ dv=\cos\frac{x}{2}dx & \Rightarrow & v=2\sin\frac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$=2\cdot 3^{-x}\sin\frac{x}{2}-2\int \sin\frac{x}{2}\cdot(-3^{-x}\ln 3)dx = 2\cdot 3^{-x}\sin\frac{x}{2}+$$

$$+2\ln 3\int 3^{-x}\sin\frac{x}{2}dx \equiv \left| \begin{array}{lcr} u=3^{-x} & \Rightarrow & du=-3^{-x}\ln 3dx \\ dv=\sin\frac{x}{2}dx & \Rightarrow & v=-2\cos\frac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$=2\cdot 3^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\ln 3\left(-2\cdot 3^{-x}\cos\frac{x}{2}-\int\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)\left(-3^{-x}\ln 3\right)dx\right)=$$

$$=2\cdot 3^{-x}\sin\frac{x}{2}-4\ln 3\cdot 3^{-x}\cos\frac{x}{2}-4\ln^2 3\int 3^{-x}\cos\frac{x}{2}dx.$$

Мы вернулись к первоначальному интегралу. Обозначим его буквой $J=\int 3^{-x}\cos\frac{x}{2}dx$ и составим уравнение:

$$\int 3^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = 2\cdot 3^{-x}\sin\frac{x}{2}-4\ln 3\cdot 3^{-x}\cos\frac{x}{2}-4\ln^2 3\int 3^{-x}\cos\frac{x}{2}dx$$

$$\Rightarrow J=2\cdot 3^{-x}\sin\frac{x}{2}-4\ln 3\cdot 3^{-x}\cos\frac{x}{2}-4\ln^2 3J.$$

Далее решаем полученное уравнение и записываем ответ:

$$J+4\ln^2 3J = 2\cdot 3^{-x}\sin\frac{x}{2}-4\ln 3\cdot 3^{-x}\cos\frac{x}{2}$$

$$J(1+4\ln^2 3)=2\cdot 3^{-x}\sin\frac{x}{2}-4\ln 3\cdot 3^{-x}\cos\frac{x}{2}$$

$$J=\frac{1}{1+4\ln^2 3}\cdot\left(2\cdot 3^{-x}\sin\frac{x}{2}-4\ln 3\cdot 3^{-x}\cos\frac{x}{2}\right)+c.$$

Конечный результат:

$$\int 3^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{1+4\ln^2 3}\cdot\left(2\cdot 3^{-x}\sin\frac{x}{2}-4\ln 3\cdot 3^{-x}\cos\frac{x}{2}\right)+c.$$

5. Интегрирование рациональных функций

Важным классом функций являются рациональные функции, то есть функции, которые можно представить в виде рациональной дроби:

$$\frac{P_n(x)}{Q_k(x)}=\frac{A_1x^n+A_2x^{n-1}+A_3x^{n-2}+...+A_{n-1}x+A_n}{B_1x^k+B_2x^{k-1}+B_3x^{k-2}+...+B_{k-1}x+B_k},$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени n, и $Q_k(x)$ - многочлен степени k.

Рациональная дробь называется *неправильной*, если степень числителя выше или равна степени знаменателя $(n\ge k)$. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя ниже степени знаменателя $(n<k)$.

Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого нужно разделить числитель на знаменатель «уголком».

Пример: $\dfrac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x}$ - это неправильная рациональная дробь, где $P_n(x)=2x^5+6x^3+1$, степень многочлена $n=5$, и $Q_k(x)=x^4+3x$, степень $k=4$. Так как $n>k$, необходимо выделить целую часть. Для этого разделим числитель дроби на знаменатель «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} -\,2x^5+6x^3+1 & x^4+3x \\ \cline{2-2} 2x^5+6x^2 & 2x \\ 6x^3-6x^2+1 & \end{array}$$

Результат деления $2x$ - целая часть, а остаток от деления – правильная дробь с числителем $6x^3-6x^2+1$:

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x}=2x+\frac{6x^3-6x^2+1}{x^4+3x}.$$

Правильную рациональную дробь всегда можно разложить на сумму простейших (элементарных) дробей четырех видов.

I) $\dfrac{A}{x-a}$ II) $\dfrac{A}{(x-a)^m}$

III) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ IV) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

где m и n – целые положительные числа.

5.1. Интегрирование рациональных дробей

Для нахождения интеграла от рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ нужно:

1) *Если дробь неправильная - выделить целую часть.*

2) *Разложить знаменатель* $Q(x)$ *полученной правильной дроби на линейные множители вида* $(x-a)^m$ *и квадратные множители* $(x^2+px+q)^n$, *не имеющие действительных корней.*

3) *Записать разложение данной рациональной дроби* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *на сумму простейших дробей с неопределенными (буквенными) коэффициентами, используя выражения вида (1) и (2):*

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m} \qquad (1)$$

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_nx+N_n}{\left(x^2+px+q\right)^n} \qquad (2)$$

Знаменателями элементарных дробей являются все целые степени каждого множителя в разложении $Q(x)$, начиная с первой степени и заканчивая той степенью, которую множитель имеет в разложении $Q(x)$.

4) *Полученное равенство привести к общему знаменателю.*

5) *Найти неопределенные коэффициенты одним из двух способов.*

I способ: раскрыть скобки, привести подобные слагаемые и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в полученном и имеющемся многочленах.

II способ: не раскрывая скобок, дать аргументу x такие значения, которые являются действительными корнями знаменателя $Q(x)$.

6) *Решить полученную систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов и подставить найденные значения в числители простейших дробей.*

После разложения на простейшие дроби интегрирование всякой правильной рациональной дроби сводится к нахождению табличных интегралов или приводящихся к ним.

Пример 1. $\int\frac{5-4x}{x^2-x-2}dx$.

1) Подынтегральная дробь является правильной, так как степень числителя *(n=1)* меньше степени знаменателя *(k=2).*

2) Раскладываем знаменатель x^2-x-2 на линейные множители. Воспользуемся теоремой Виета: $x_1=-1$, $x_2=2$. Получаем: $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

3) Выписываем подынтегральную дробь и раскладываем ее на простейшие. Знаменатель состоит из линейных сомножителей вида $(x-a)^m$, где $m=1$, значит используем простейшую дробь первого вида $\dfrac{A}{x-a}$:

$$\frac{5-4x}{x^2-x-2}=\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

4) *Полученное выражение приводим к общему знаменателю:*

$$\frac{5-4x}{x^2-x-2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

5) В полученном уравнении знаменатели левой и правой частей равны, значит можно приравнять их числители:

$$5-4x=A(x-2)+B(x+1).$$

Найдем неопределенные коэффициенты A и B.

I способ: $5-4x=A(x-2)+B(x+1)$

$$5-4x=Ax-2A+Bx+B$$
$$5-4x=(A+B)x-2A+B$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

при x^1 имеем $-4=A+B$;

при x^2 имеем $5=-2A+B$.

6) Решаем систему уравнений и находим коэффициенты A и B:

$$\begin{cases}-4=A+B\\5=-2A+B\end{cases}\qquad\begin{cases}A=-3\\B=-1\end{cases}.$$

II способ: корни знаменателя $x_1=-1,\ x_2=2$ по очереди подставим в выражение $5-4x=A(x-2)+B(x+1)$:

$$x_1=-1\ \Rightarrow\ 5-4(-1)=A(-1-2)+B(-1+1)\Rightarrow 9=-3A\Rightarrow A=-3;$$
$$x_2=2\ \Rightarrow\ 5-4\cdot 2=A(2-2)+B(2+1)\Rightarrow -3=3B\Rightarrow B=-1.$$

Подставим найденные коэффициенты в числители простейших дробей: $\dfrac{5-4x}{x^2-x-2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}=\dfrac{-3}{x+1}+\dfrac{-1}{x-2}$

Возвращаемся к интегралу:

$$\int\frac{5-4x}{x^2-x-2}dx=\int\left(\frac{-3}{x+1}+\frac{-1}{x-2}\right)dx=-3\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$= c - 3\ln|x+1| - \ln|x-2|.$$

Пример 2. $\int \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + x^2} dx$.

1) Подынтегральная дробь является неправильной, так как степень числителя *(n=4)* и степень знаменателя *(k=4)* равны. Выделяем целую часть с помощью деления числителя на знаменатель «уголком»: $\frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + x^2} = 1 + \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + x^2}$.

2) Представим знаменатель в виде произведения:

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$$

3) x^2 - это линейный множитель кратности 2, значит ему соответствуют две простейшие дроби вида $\frac{A}{(x-a)^m}$, где $m = 1$ *и* $m = 2$, то есть $\frac{A}{x}$ *и* $\frac{B}{x^2}$.

$x^2 + 1$ - это квадратный множитель, не имеющий действительных корней; ему соответствует простейшая дробь вида $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$, то есть $\frac{Mx + N}{x^2 + 1}$.

Тогда остаток можно представить в виде суммы простейших дробей: $\frac{x^3 + x + 1}{x^4 + x^2} = \frac{x^3 + x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}$.

4) Приводим правую часть к общему знаменателю и сравниваем числители: $\frac{x^3 + x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Mx + N)x^2}{x^2(x^2 + 1)}$

5) Найдем неопределенные коэффициенты:

$$x^3 + x + 1 = Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Mx + N)x^2$$

В знаменателе есть один действительный корень $x = 0$. Подставим его в выражение: $x = 0 \Rightarrow 1 = B$

Подставим $B = 1$ в выражение и найдем оставшиеся неопределенные коэффициенты:

$$x^3+x+1=Ax(x^2+1)+(x^2+1)+(Mx+N)x^2$$
$$x^3+x+1-(x^2+1)=Ax(x^2+1)+(Mx+N)x^2$$
$$x^3-x^2+x=Ax^3+Ax+Mx^3+Nx^2$$

$$x^3 \Rightarrow 1=A+M \qquad M=0$$
$$x^2 \Rightarrow -1=N \qquad N=-1$$
$$x^1 \Rightarrow 1=A \qquad A=1$$

Подставим найденные коэффициенты в числители простейших дробей: $\dfrac{x^3+x+1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{-1}{x^2+1}$.

Переходим к интегралу:

$$\int\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4+x^2}dx=\int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=\int dx+\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=x+\ln|x|-\frac{1}{x}-arctgx+c\,.$$

5.2. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx;\ \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Для отыскания указанных интегралов необходимо выделить полный квадрат из квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, и осуществить замену переменной. В результате получается табличный интеграл или приводящий к нему.

Пример 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене x^2+4x+8, используя формулу сокращенного умножения

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$
$$x^2+4x+8=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+8=(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2)-$$

$$-2^2+8=(x^2+2\cdot x\cdot 2+4)+4=(x+2)^2+4.$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}.$$

Используем свойство дифференциала $du=d(u\pm k)$, (то есть если к выражению под знаком дифференциала прибавить (вычесть) любое число, то значение дифференциала не изменится).

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4}\equiv\left|\begin{matrix}u=x+2\\ du=d(x+2)=dx\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{du}{u^2+2^2}\equiv\left|\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+c\right|=\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+c.$$

Пример 2. $\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}.$

Выделяем из квадратного трехчлена полный квадрат

$$9+6x-3x^2=-3\left(x^2-2x-3\right)=-3\left((x^2-2\cdot x\cdot 1+1)-1-3\right)=$$

$$=-3\left((x-1)^2-4\right)=3\left(4-(x-1)^2\right).$$

Переходим к интегралу и вводим новую переменную:

$$\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}=\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{3\left(4-(x-1)^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{\left(4-(x-1)^2\right)}}\equiv$$

$$\equiv\left|\begin{matrix}z=x-1\\ x=z+1\\ dx=dz\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3(z+1)-5}{\sqrt{4-z^2}}dz=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3z-2}{\sqrt{4-z^2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3zdz}{\sqrt{4-z^2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{2dz}{\sqrt{4-z^2}}\equiv\left|\begin{matrix}d(4-z^2)=-2zdz\\ zdz=-\frac{1}{2}d(4-z^2)\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3}}\int\frac{d(4-z^2)}{-2\sqrt{4-z^2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dz}{\sqrt{4-z^2}}\equiv\left|\begin{array}{c}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+c\\ \int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{3}{-2\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{4-z^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{z}{2}+c=\frac{-3}{\sqrt{3}}\sqrt{4-(x-1)^2}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}+c=-\frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{3+2x-x^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}+c.$$

Пример 3. $\int\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}dx.$

Вначале выделяем из подынтегральной неправильной дроби целую часть делением числителя на знаменатель:

$$\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}=-2x+1+\frac{x-1}{2x-3x^2}.$$

Затем находим интеграл.

$$\int\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}dx=-2\int xdx+\int dx+\int\frac{(x-1)dx}{2x-3x^2}=-x^2+x+$$

$$+\int\frac{xdx}{2x-3x^2}-\int\frac{dx}{2x-3x^2}=-x^2+x+\int\frac{xdx}{x(2-3x)}-\int\frac{dx}{-3(x^2-2x)}=$$

$$=-x^2+x+\int\frac{dx}{2-3x}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)}=-x^2+x+$$

$$+\int\frac{-\frac{1}{3}d(2-3x)}{2-3x}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}\equiv\left|\begin{array}{c}\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c\\ \int\frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c\end{array}\right|=$$

$$=-x^2+x-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{3}}\ln\left|\frac{\frac{1}{3}+x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\left(x-\frac{1}{3}\right)}\right|+c=-x^2+x-$$

$$-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{\frac{2}{3}-x}\right|+c=-x^2+x-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x}{2-3x}\right|+c\cdot$$

6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Иррациональной функцией называется выражение, содержащее переменную в дробной степени.

В некоторых случаях интегралы от иррациональных функций удается рационализировать, то есть с помощью подходящей подстановки свести к интегралам от рациональных функций. Рассмотрим наиболее типичные случаи.

I. Интеграл $\int R(x,x^{\alpha},x^{\beta},...)dx,$ (где R – рациональная функция, $\alpha=\frac{m_1}{n_1},\beta=\frac{m_2}{n_2},...$ – рациональные числа), сводится к интегралу от рациональной функции, с помощью подстановки $x=t^k$, где k – общий знаменатель всех дробных показателей x. Например, если подынтегральная функция содержит $\sqrt{x},\ \sqrt[3]{x^4},\ \sqrt[4]{x^3}$, то есть $x^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{4}{3}},\ x^{\frac{3}{4}}$, то общий знаменатель дробных показателей степеней $\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4}$ есть наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, $k=НОК(2,3,4)=12$.

Пример 1. $\int\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}\right)\sqrt[6]{x^5}}dx$

Подынтегральная функция содержит $x^{\frac{1}{3}},\ x^{\frac{1}{4}},\ x^{\frac{1}{6}},\ x^{\frac{5}{6}}$, значит $k=НОК(3,4,6,6)=12$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}\right)\sqrt[6]{x^5}}dx \equiv \left| \begin{array}{c} НОК(3,4,6)=12 \\ x=t^{12} \\ dx=12t^{11}dt \end{array} \right| = \int \frac{\left(\sqrt[3]{t^{12}}+2\right)12t^{11}dt}{\left(\sqrt[4]{t^{12}}+\sqrt[6]{t^{12}}\right)\sqrt[6]{(t^{12})^5}} =$$

$$=12\int \frac{(t^4+2)t^{11}dt}{(t^3+t^2)t^{10}} = 12\int \frac{(t^4+2)tdt}{t^2(t+1)} = 12\int \frac{t^4+2}{t(t+1)}dt =$$

$$\equiv \left| \begin{array}{l} \dfrac{t^4+2}{t(t+1)} - неправильная\ дробь \\ \dfrac{t^4+2}{t(t+1)} = t^2-t+1+\dfrac{2-t}{t(t+1)} \end{array} \right| = 12\int \left(t^2-t+1+\frac{2-t}{t(t+1)} \right)dt =$$

$$=12\int t^2dt - 12\int tdt + 12\int dt + 12\int \frac{(2-t)dt}{t(t+1)} = 12\frac{t^3}{3} - 12\frac{t^2}{2} + 12t +$$

$$+12\cdot 2\int \frac{dt}{t(t+1)} - 12\int \frac{tdt}{t(t+1)} = 4t^3-6t^2+12t+24\int \frac{dt}{t^2+t} -$$

$$-12\int \frac{dt}{t+1} = 4t^3-6t^2+12t+24\int \frac{dt}{t^2+2\cdot t\cdot \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} -$$

$$-12\int \frac{d(t+1)}{t+1} = 4t^3-6t^2+12t+24\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} - 12\int \frac{d(t+1)}{t+1} =$$

$$\equiv \left| \begin{array}{c} \displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c \\ \displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \end{array} \right| = 4t^3-6t^2+12t - \frac{24}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right| -$$

$$-12\ln|t+1| + c \equiv \left| \begin{array}{l} x=t^{12} \\ t=\sqrt[12]{x} \end{array} \right| = 4\sqrt[12]{x^3} - 6\sqrt[12]{x^2} + 12\sqrt[12]{x} - 24\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}+1}{-\sqrt[12]{x}}\right| -$$

$$-12\ln\left|\sqrt[12]{x}+1\right| + c = 4\sqrt[4]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} - 24\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}+1}{\sqrt[12]{x}}\right| - 12\ln\left|\sqrt[12]{x}+1\right| + c.$$

Интегралы более общего вида

$$\int R\left[x,(ax+b)^{\alpha},(ax+b)^{\beta},\ldots\right]dx,\ \int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta},\ldots\right]dx$$

находятся (приводятся к рациональному виду) с помощью аналогичных подстановок: $ax+b=t^{k}$ или $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^{k}$.

Пример 2. $\displaystyle\int\frac{x^{2}dx}{(4x-3)\sqrt{4x-3}}$.

$$\int\frac{x^{2}dx}{(4x-3)\sqrt{4x-3}}\equiv\left|\begin{array}{c}HOK(2)=2\\ 4x-3=z^{2}\\ x=\frac{1}{4}(z^{2}+3)\\ dx=\frac{1}{2}zdz\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{16}(z^{2}+3)^{2}\,\frac{1}{2}zdz}{z^{2}\cdot z}=\frac{1}{32}\int\frac{(z^{2}+3)^{2}dz}{z^{2}}=$$

$$=\frac{1}{32}\int\frac{z^{4}+6z^{2}+9}{z^{2}}dz=\frac{1}{32}\int z^{2}dz+\frac{6}{32}\int dz+\frac{9}{32}\int\frac{dz}{z^{2}}=\frac{1}{32}\cdot\frac{z^{3}}{3}++\frac{3}{16}z-$$

$$-\frac{9}{32}\cdot\frac{1}{z}+c\equiv\left|\begin{array}{l}4x-3=z^{2}\\ z=\sqrt{4x-3}\end{array}\right|=\frac{\sqrt{(4x-3)^{3}}}{96}+\frac{3\sqrt{4x-3}}{16}-\frac{9}{32\sqrt{4x-3}}+c.$$

Пример 3. $\displaystyle\int\frac{1}{x^{2}}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$

$$\int\frac{1}{x^{2}}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx\equiv\left|\begin{array}{c}\frac{1+x}{x}=t^{2}\\ 1+x=xt^{2}\Rightarrow x(1-t^{2})=-1\Rightarrow x=\frac{1}{t^{2}-1}\\ dx=\frac{-2tdt}{(t^{2}-1)^{2}}\end{array}\right|=$$

$$=\int\left(t^{2}-1\right)^{2}t\cdot\frac{-2tdt}{\left(t^{2}-1\right)^{2}}=-2\int t^{2}dt=-\frac{2}{3}t^{3}+c=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^{3}}+c\cdot$$

II. Следующие интегралы сводятся к интегралам от тригонометрических функций с помощью соответствующих подстановок:

$\int R\left(x,\sqrt{a^{2}-x^{2}}\right)dx$ – подстановкой $x=a\sin t$;

$\int R\left(x,\sqrt{a^{2}+x^{2}}\right)dx$ – подстановкой $x=atgt$;

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx - \text{подстановкой } x = \frac{a}{\sin t};$$

Пример 4. $\int \frac{\sqrt{\left(4 - x^2\right)^3}}{x^6}dx$.

$$\int \frac{\sqrt{\left(4 - x^2\right)^3}}{x^6}dx \equiv \left| \begin{array}{c} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \\ \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\sqrt{1 - \sin^2 t} = 2\cos t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(2\cos t)^3}{(2\sin t)^6} 2\cos t dt = \frac{8}{32}\int \frac{\cos^4 t dt}{\sin^6 t} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t \cdot \sin^2 t} dt = = \frac{1}{4}\int \frac{ctg^4 t}{\sin^2 t} dt \equiv$$

$$\equiv \left| d(ctgt) = -\frac{dt}{\sin^2 t} \right| = -\frac{1}{4}\int ctg^4 t d(ctgt) \equiv \left| \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + c \right| = -\frac{1}{20} ctg^5 t + c \equiv$$

$$\equiv \left| \begin{array}{c} ctgt = \dfrac{\cos t}{\sin t}; \\ \cos t = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2}; \sin t = \dfrac{x}{2}; \\ ctgt = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x}. \end{array} \right| = -\frac{1}{20}\frac{\sqrt{\left(4 - x^2\right)^5}}{x^5} + c.$$

Пример 5. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{x + 1}dx$.

Подынтегральное выражение содержит квадратный трехчлен, значит, выделяем полный квадрат: $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 + 2$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{x + 1}dx = \int \frac{\sqrt{(x + 1)^2 + 2}}{x + 1}dx \equiv$$

$$\equiv \left| \begin{array}{c} x + 1 = \sqrt{2}tgt \\ dx = \dfrac{\sqrt{2}dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{(x + 1)^2 + 2} = \sqrt{2tg^2 t + 2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos t} \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{2}}{\cos t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}tgt} \cdot \frac{\sqrt{2}dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{dt}{\sin t \cos^2 t} = \sqrt{2}\int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t} dt = \sqrt{2}\int \frac{\sin^2 t}{\sin t \cos^2 t} dt +$$

$$+\sqrt{2}\int\frac{\cos^2 tdt}{\sin t\cos^2 t}=\sqrt{2}\int\frac{\sin tdt}{\cos^2 t}+\sqrt{2}\int\frac{dt}{\sin t}\equiv\left|\begin{array}{c} d(\cos t)=-\sin tdt \\ \int\frac{du}{\sin u}=\ln\left|tg\frac{u}{2}\right|+c\end{array}\right|=$$

$$=-\sqrt{2}\int\frac{d(\cos t)}{\cos^2 t}+\sqrt{2}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{\cos t}+\sqrt{2}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|=$$

$$\equiv\left|\begin{array}{c}\sqrt{(x+1)^2+2}=\frac{\sqrt{2}}{\cos t}\\ x+1=\sqrt{2}tgt \\ t=arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}\end{array}\right|=\sqrt{(x+1)^2+2}+\sqrt{2}\ln\left|tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right|+c.$$

7. Интегрирование тригонометрических функций

I. Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R – рациональная функция. Интегралы указанного вида приводятся к интегралам от рациональных алгебраических функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t=tg\frac{x}{2}$, так как при этом

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2arctgt;\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

В частности, это относится к интегралам вида $\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$, где $a\neq 0$ или $b\neq 0$.

Пример 1. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$.

Это интеграл вида $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$, где $c = 0$, значит можно применить *универсальную тригонометрическую подстановку.*

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} \equiv \left| \begin{array}{c} t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2arctgt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2dt}{1+t^2} : \left(2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) = \int \frac{2dt}{1+t^2} : \left(\frac{4t - 1 + t^2}{1+t^2} \right) =$$

$$= \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{4t - 1 + t^2} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 4t - 1} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2 - 5} = 2\int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2 - 5} \equiv$$

$$\equiv \left| \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c \right| = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5} + t + 2}{\sqrt{5} - t - 2}\right| + c =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left| \frac{\sqrt{5} + 2 + tg\frac{x}{2}}{\sqrt{5} - 2 - tg\frac{x}{2}} \right| + c.$$

Однако универсальная подстановка часто приводит к сложным вычислениям. В некоторых случаях выражение $R(\sin x, \cos x)$ *можно привести к рациональному виду с помощью других подстановок.*

1). Если $R(\sin x, \cos x)$ - *нечетная функция относительно* $\sin x$, то есть если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\cos x = t$.

2). Если $R(\sin x, \cos x)$ - *нечетная функция относительно* $\cos x$, то есть если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то инте грал рационализируется подстановкой $\sin x = t$.

3). Если $R(\sin x, \cos x)$ - *четная функция относительно* $\sin x$ и $\cos x$, то есть если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $tgx = t \quad (ctgx = t)$. Тогда $x = arctgt;\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2};\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. В частности это относится к интегралам вида $\int \dfrac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x + d}$, где $a \neq 0$ или $b \neq 0$, или $c \neq 0$.

Пример 2. $\int \dfrac{\sin^3 xdx}{4+\cos x}$.

Это интеграл вида $\int \dfrac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$, где $a = 0$, значит можно применить универсальную тригонометрическую подстановку.

$$\int \frac{\sin^3 xdx}{4+\cos x} \equiv \left| \begin{array}{c} t = tg\,\dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2arctgt \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3 \cdot \frac{2dt}{1+t^2} : \left(4 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = \int \frac{16t^3dt}{(1+t^2)^4} : \frac{4(1+t^2)+1-t^2}{1+t^2} =$$

$= \int \dfrac{16t^3dt}{(1+t^2)^3(5+3t^2)}$. В результате получили интеграл от рациональной дроби, нахождение которого займет много времени. Поэтому целесообразно сделать другую подстановку. Для этого проверим, является ли подынтегральная функция четной или нечетной относительно $\sin x$ или $\cos x$. Подставим в функцию $-\sin x$ вместо $\sin x$:

$R(-\sin x, \cos x) = \dfrac{(-\sin x)^3}{4+\cos x} = -\dfrac{\sin^3 x}{4+\cos x} = -R(\sin x, \cos x)$, следовательно функция нечетная относительно $\sin x$, значит нужно сделать подстановку $\cos x = t$.

$$\int \frac{\sin^3 xdx}{4+\cos x} \equiv \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin xdx = dt \\ \sin xdx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{\sin^2 x}{4+\cos x}\sin xdx = \int \frac{1-\cos^2 x}{4+\cos x}\sin xdx =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{4+t}(-dt) = \int \frac{t^2-1}{4+t}dt \equiv \left| \begin{array}{l} \textit{выделяем целую часть} \\ \textit{в неправильной дроби}: \\ \frac{t^2-1}{4+t} = t-4+\frac{15}{t+4} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(t-4+\frac{15}{t+4} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 4t + 15\ln|t+4| + c.$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x}$.

Подынтегральная функция является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$. Делаем подстановку $t = tgx$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x} \equiv \left| \begin{array}{l} x = arctgt;\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2};\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} : \left(\frac{t^2}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^2} - \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{1+t^2}} + \frac{3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^2} \right) =$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} : \left(\frac{t^2-2t+3}{1+t^2} \right) = \int \frac{dt}{t^2-2t+3} = \int \frac{dt}{(t-1)^2+2} \equiv$$

$$\equiv \left| \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + c \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t-1}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx-1}{\sqrt{2}} + c.$$

II. Интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n xdx$, где m и n - целые числа. Рассмотрим следующие случаи:

1). Один из показателей m или n - *нечетное положительное число*.

Пример 4. $\int \cos^4 x \sin^5 x dx$.

Подынтегральное выражение содержит $\sin x$ в нечетной степени. Необходимо эту степень записать в виде $\sin^5 x = \sin^4 x \sin x$, то есть «*отщепить*» первую степень. Функцию в первой степени вносим под знак дифференциала: $\sin x dx = -d(\cos x)$. Функцию, оставшуюся после «*отщепления*», расписываем с помощью тригонометрической единицы: $\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2$.

$$\int \cos^4 x \sin^5 x dx = \int \cos^4 x \sin^4 x \sin x dx = -\int \cos^4 x \sin^4 x d(\cos x) =$$
$$= -\int \cos^4 x (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) = -\int \cos^4 x(1-2\cos^2 x +$$
$$+\cos^4 x) d(\cos x) = -\int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x) d(\cos x) =$$
$$= -\int \cos^4 x d(\cos x) + 2\int \cos^6 x d(\cos x) - \int \cos^8 x d(\cos x) \equiv$$
$$\equiv \left| \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \right| = -\frac{\cos^5 x}{x} + \frac{2\cos^7 x}{x} - \frac{\cos^9 x}{x} + c.$$

2). Оба показателя m и n - *четные неотрицательные числа*. Тогда следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью тригонометрических формул $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

Пример 5. $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx$.

В подынтегральном выражении обе функции находятся в четных степенях. Используем формулы понижения степени.

$$\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx \equiv \left| \begin{array}{l} \sin^2 2x = \frac{1}{2}(1-\cos 4x) \\ \cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x) \end{array} \right| = \int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{4}(1+\cos 4x)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)(1+2\cos 4x + \cos^2 4x) dx =$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+2\cos 4x+\cos^2 4x-\cos 4x-2\cos^2 4x-\cos^3 4x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x-\cos^2 4x-\cos^3 4x)dx=\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx-$$

$$-\frac{1}{8}\int\cos^2 4xdx-\frac{1}{8}\int\cos^3 4xdx=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x-$$

$$-\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}(1+\cos 8x)dx-\frac{1}{8}\int\cos^2 4x\cos 4xdx=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x-$$

$$-\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int\cos 8xdx-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\int(1-\sin^2 4x)d(\sin 4x)=\frac{1}{8}x+$$

$$+\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{16}x-\frac{1}{128}\sin 8x-\frac{1}{32}\int d(\sin 4x)+$$

$$+\frac{1}{32}\int\sin^2 4xd(\sin 4x)=\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{128}\sin 8x-\frac{1}{32}\sin 4x+$$

$$+\frac{\sin^3 4x}{96}+c=\frac{1}{16}x-\frac{1}{128}\sin 8x+\frac{\sin^3 4x}{96}+c.$$

III. Интегралы вида $\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}$, где m и n - *целые числа.* Здесь следует расписать тригонометрическую единицу в числителе дроби.

Пример 6. $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 xdx}{\sin^3 x\cos x}+\int\frac{\cos^2 xdx}{\sin^3 x\cos x}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}+\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x}=\int\frac{2dx}{\sin 2x}+\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}=$$

$$\equiv\left|\begin{array}{c}\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left|tg\frac{u}{2}\right|+c\\ 2dx=d(2x)\end{array}\right|+\left|\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+c\right|=\ln\left|tg\frac{2x}{2}\right|-\frac{1}{\sin x}+c=$$

$$=\ln|tgx|-\frac{1}{\sin x}+c.$$

Пример 7. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 xdx}{\sin^3 x\cos^4 x} + \int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^3 x\cos^4 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin x\cos^4 x} +$$

$$+ \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^3 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 xdx}{\sin x\cos^4 x} + \int \frac{\cos^2 xdx}{\sin x\cos^4 x} +$$

$$+ \int \frac{\sin^2 xdx}{\sin^3 x\cos^2 x} + \int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^3 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin xdx}{\cos^4 x} + \int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} +$$

$$+ \int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos^4 x} + 2\int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin x\cos^2 x} +$$

$$+ \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + 2\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x} + 2\int \frac{dx}{\sin x} +$$

$$+ \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + 2\int \frac{-d(\cos x)}{\cos^2 x} + 3\int \frac{dx}{\sin x} +$$

$$+ \int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} + 3\ln\left(tg\,\frac{x}{2}\right) + \int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^3 x} \equiv$$

$$\equiv \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & du = -\sin xdx \\ dv = \dfrac{\cos xdx}{\sin^3 x} & v = \dfrac{-1}{2\sin^2 x} \end{array} \right| = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} + 3\ln\left(tg\,\frac{x}{2}\right) +$$

$$+ \frac{-\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sin xdx}{\sin^2 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} + 3\ln\left(tg\,\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} -$$

$$- \frac{1}{2}\ln\left(tg\,\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} + \frac{5}{2}\ln\left(tg\,\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + c\,.$$

IV. Интегралы вида $\int \sin ax\cos bxdx$, $\int \cos ax\cos bxdx$, $\int \sin ax\sin bxdx$ находятся с помощью тригонометрических формул: $\sin ax\cos bx = \frac{1}{2}\big(\sin(ax + bx) + \sin(ax - bx)\big)$;

$$\cos ax\cos bx = \frac{1}{2}\big(\cos(ax + bx) + \cos(ax - bx)\big);$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(ax - bx) - \cos(ax + bx)\right).$$

Пример 8. $\int \sin 2x \sin 3x \cos 5x dx$.

$$\int \sin 2x \sin 3x \cos 5x dx = \int \frac{1}{2}(\cos(2x - 3x) - \cos(2x + 3x))\cos 5x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(-x) - \cos 5x\right)\cos 5x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos x \cos 5x - \cos^2 5x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos^2 5x dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\cos(x + 5x) +$$

$$+ \cos(x - 5x))dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 10x)dx = \frac{1}{4}\int \cos 6x dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int \cos(-4x)dx - \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 10x dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x -$$

$$- \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}\sin 10x + c = \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{40}\sin 10x + c.$$

V. Интегралы вида $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$ находятся с помощью формул $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, позволяющих понизить степень тангенса или котангенса.

Пример 9. $\int tg^3 x dx$.

$$\int tg^3 x dx = \int tg^2 x tgx dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)tgx dx = \int \frac{tgx dx}{\cos^2 x} - \int tgx dx =$$

$$\equiv \left|\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)\right| = \int tgx \cdot d(tgx) - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx \equiv \left|\sin x dx = -d(\cos x)\right| =$$

$$= \frac{tg^2 x}{2} - \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = \frac{tg^2 x}{2} + \ln\left|\cos x\right| + c.$$

Пример 10. $\int \frac{ctgx\sqrt{ctgx}\,dx}{\sin^4 x}$.

$$\int \frac{ctgx\sqrt{ctgx}\,dx}{\sin^4 x} = \int \frac{ctg^{\frac{3}{2}} x dx}{\sin^2 x \sin^2 x} \equiv \left|\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctgx)\right| = -\int \frac{ctg^{\frac{3}{2}} x d(ctgx)}{\sin^2 x} =$$

$$\equiv\left|\frac{1}{\sin^2 x}=1+ctg^2x\right|=-\int ctg^{\frac{3}{2}}x\left(1+ctg^2x\right)d(ctgx)=$$

$$=-\int ctg^{\frac{3}{2}}xd(ctgx)-\int ctg^{\frac{7}{2}}xd(ctgx)=-\frac{ctg^{\frac{5}{2}}x}{5/2}-\frac{ctg^{\frac{9}{2}}x}{9/2}+c=$$

$$=-\frac{2}{5}\sqrt{ctg^5x}-\frac{2}{9}\sqrt{ctg^9x}+c.$$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Понятие об определенном интеграле.
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Основные свойства определенного интеграла.
4. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Методы вычисления определенных интегралов.
6. Вычисление площадей фигур.
7. Вычисление объемов тел вращения.

1. Понятие об определенном интеграле.

Определенным интегралом от непрерывной на отрезке (a,b) функции f(x) в пределах от a до b называется предел ее интегральной суммы, когда длина максимального из элементарных отрезков, на которые разбит отрезок (a,b), стремится к нулю.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Числа a и b называются *пределами интегрирования*, соответственно – нижним и верхним, (a,b) – промежуткам интегрирования, а f(x) – подынтегральной функцией.

2. Геометрический смысл определенного интеграла.

Определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции f(x) при a ≤b равен площади соответствующей криволинейной трапеции, т.е. $S=\int_a^b f(x)dx$.

3. Основные свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^b f(x)dx$ - число.
2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю, т.е. $\int_a^a f(x)dx=0$
3. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$
4. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
5. Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
6. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b \varphi(x)dx-\int_a^b \psi(x)dx$$

7. Если отрезок интегрирования разбит на части, то определенный интеграл по всему отрезку равен сумме определенных инте-

гралов по его частям, т.е. если $c \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

8. Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции при некотором промежуточном значении аргумента (теорема о среднем). $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$; a<c<b

9. Определенный интеграл постоянной величины равен произведению этой постоянной на длину промежутка интегрирования:

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

<u>Следствие.</u> Если подынтегральная функция равна нулю, то определенный интеграл также равен нулю. $\int_a^b 0 dx = 0$.

4. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть f(x) – функция, непрерывная на данном отрезке (a, b), и F(x) – некоторая ее первообразная,

т.е. $F'(x) = f(x)$ при $x \in [a,b]$.

Определение. Под определенным интегралом

$$\int_a^b f(x)dx$$

от данной непрерывной функции f(x) на данном отрезке (a,b) понимается соответствующее приращение ее первообразной, т.е.

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

– это формула Ньютона-Лейбница.

Введя обозначения для разности: $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$,
где вертикальная черта носит название вставки, формулу Ньютона -Лейбница запишем в виде: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$

5. Методы вычисления определенных интегралов.

а) Формула интегрирования по частям для вычисления определенного интеграла имеет вид: $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$

б) Пусть дан определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и для его вычисления нужно ввести новую переменную t, связанную с переменной x соотношением $x=\varphi(t)$, где $\alpha\le t\le\beta$. При изменении t от α до β переменная x меняется от a до b, т.е. $\begin{cases}\varphi(\alpha)=a\\ \varphi(\beta)=b\end{cases}$. Тогда справедлива формула: $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Это формула перехода к новой переменной под знаком определенного интеграла.

Замечание. При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости возвращаться к прежней переменной.

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx = \left| \begin{array}{l} x^2-16=t \\ dt=2xdx \\ xdx=\frac{1}{2}dt \\ \alpha=4^2-16=0 \\ \beta=5^2-16=9 \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^9 t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Big|_9^0=\frac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^9=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{9}=9$$

6. Вычисление площадей фигур.

1. Определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции f(x) при a ≤ b равен площади соответствующей криволинейной трапеции, т.е. $S=\int_a^b f(x)dx$ или $S=\int_{x_1}^{x_2} ydx$ - площадь криволинейной трапеции прилежащей к оси OX;

$S=\int_{y_1}^{y_2} xdy$, где $x=\varphi(y)$ – площадь криволинейной трапеции, прилежащей к оси OY.

2. Если $y_1=f_1(x)$, а $y_2=f_2(x)$ на (a,b), то площадь плоской фигуры, заключенной между ними равна: $S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$.

7. Вычисление объемов тел вращения.

Объем тела вращения криволинейной трапеции, ограниченной линиями y = f(x), y= 0, x=a, x=b, вокруг оси Ох:

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

а объем тела вращения криволинейной трапеции, ограниченной линиями x= □(y), x=0, y=c, y=d, вокруг оси Оу:
Пример:Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, y = 0, x= 1, x = 4, вокруг оси Ох.

№ 6 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=6x-x^2$ и осью ОХ. Ответ:S=36 кв.ед.
№ 7 Вычислить площадь фигуры, заключенной между линиями, заданными уравнениями $y=8+2x-x^2$ и $y=2x+4$.

Ответ: $10\frac{2}{3}$ кв.ед.

№ 8 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^3$, y=8, x=0. Ответ: 12